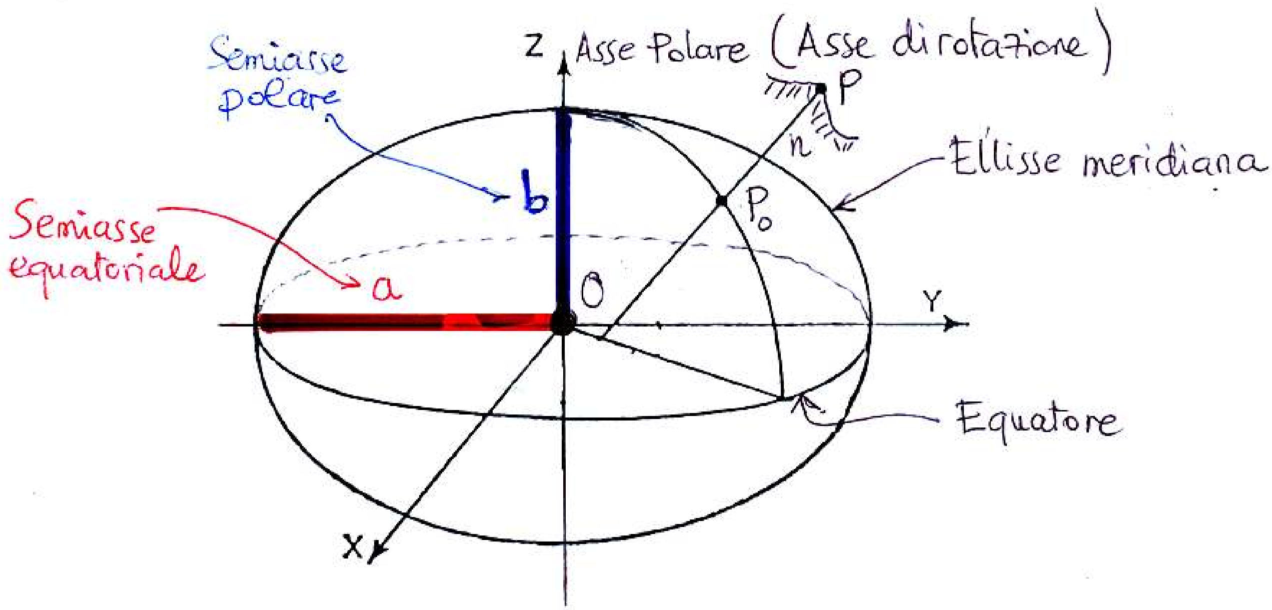
L'ELLISSOIDE TERRESTRE

Fin dalla seconda metà del XVII secolo (su proposta di Newton) la superficie più adatta a essere assunta come superficie di riferimento per la Terra è stata individuata in un ELLISSOIDE DI ROTAZIONE.

E' la superficie generata dalla rotazione di un'ellisse (detta ellisse meridiana, di semiassi a, b) attorno all'asse minore (asse polare)



Vantaggi:
- approssima bene (con appropriati valori dei parametri dimensionali) la forma della Terra
- è abbastanza semplice da descrivere matematicamente

PARAMETRI DELL' ELLISSOIDE:

L'ellissoide risulta definito assegnando i valori dei due semiassi a, b oppure un semiasse e uno dei seguenti parametri adimensionali:

schiacciamento $$\alpha = \frac{a-b}{a}$$

(prima) eccentricità $$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

seconda eccentricità $$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

Per determinare i parametri dell'ellissoide terrestre è possibile utilizzare metodi geometrici basati su misure a terra (ad es. metodo degli archi, v. testo).
Più recentemente si utilizzano osservazioni su satelliti artificiali.

Parametri degli ellissoidi maggiormente utilizzati:

Ellissoide	a (m)	α	b (m)	e^2
WGS 84 (GRS80)	6378137	1/298.257	6356752.314	$6.69438002 \cdot 10^{-3}$
HAYFORD (Internazionale)	6378388	1/297	6356911,946	$6.72267002 \cdot 10^{-3}$
BESSEL	6377397.155	1/299.152	6356078.963	$6.67437223 \cdot 10^{-3}$

Si dicono MERIDIANI le sezioni piane (ellissi tutte uguali) ottenute secando l'ellissoide con piani passanti per l'asse polare

Si dicono PARALLELI le sezioni piane (circonferenze) ottenute secando l'ellissoide con piani paralleli al piano equatoriale

COORDINATE GEOGRAFICHE ELLISSOIDICHE:

Sono due parametri (angoli) atti a definire univocamente la posizione planimetrica di un punto P sull'ellissoide terrestre

Latitudine φ = Angolo compreso tra la normale ellissoidica per P e il piano equatoriale, contato verso nord (latitudine N) o verso sud (latitudine S)

risulta

$$0° \leq \varphi \leq 90° N$$

$$0° \leq \varphi \leq 90° S$$

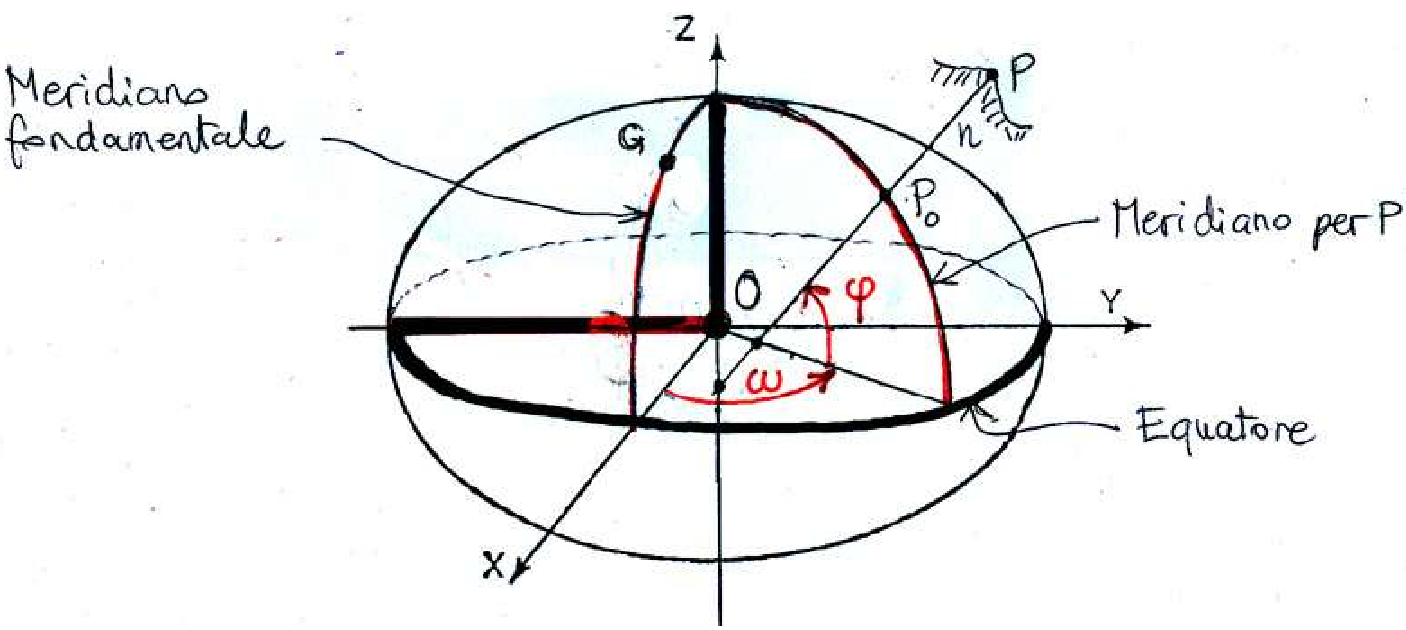
Longitudine ω = Angolo compreso tra il piano del meridiano per P e il piano del meridiano fondamentale (Greenwich o M.Mario), contato verso est (longitudine E) o verso ovest (longitudine W)

risulta

$$0° \leq \omega \leq 360° E$$

oppure

$$0° \leq \omega \leq 360° W$$

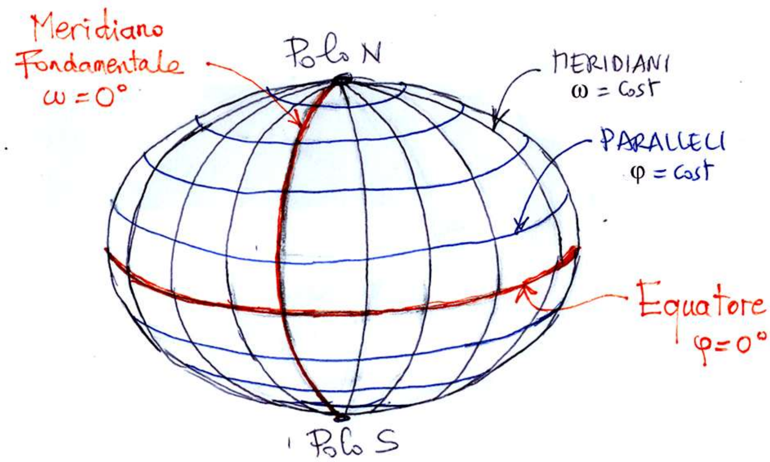


RETICOLATO GEOGRAFICO:

Lungo i paralleli φ = cost

Lungo i meridiani ω = cost

Le due famiglie di curve costituiscono il reticolato geografico. Si intersecano con angoli retti (sist. ortogonale)



COORDINATE GEOGRAFICHE ASTRONOMICHE:

Hanno definizione analoga a quelle ellissoidiche ma considerando la verticale (normale al geoide) in luogo della normale ellissoidica, il piano equatoriale astronomico (normale all'asse polare astronomico) e i meridiani astronomici

Si determinano con misure di geodesia astronomica (effettuate rispetto alle stelle "fisse")

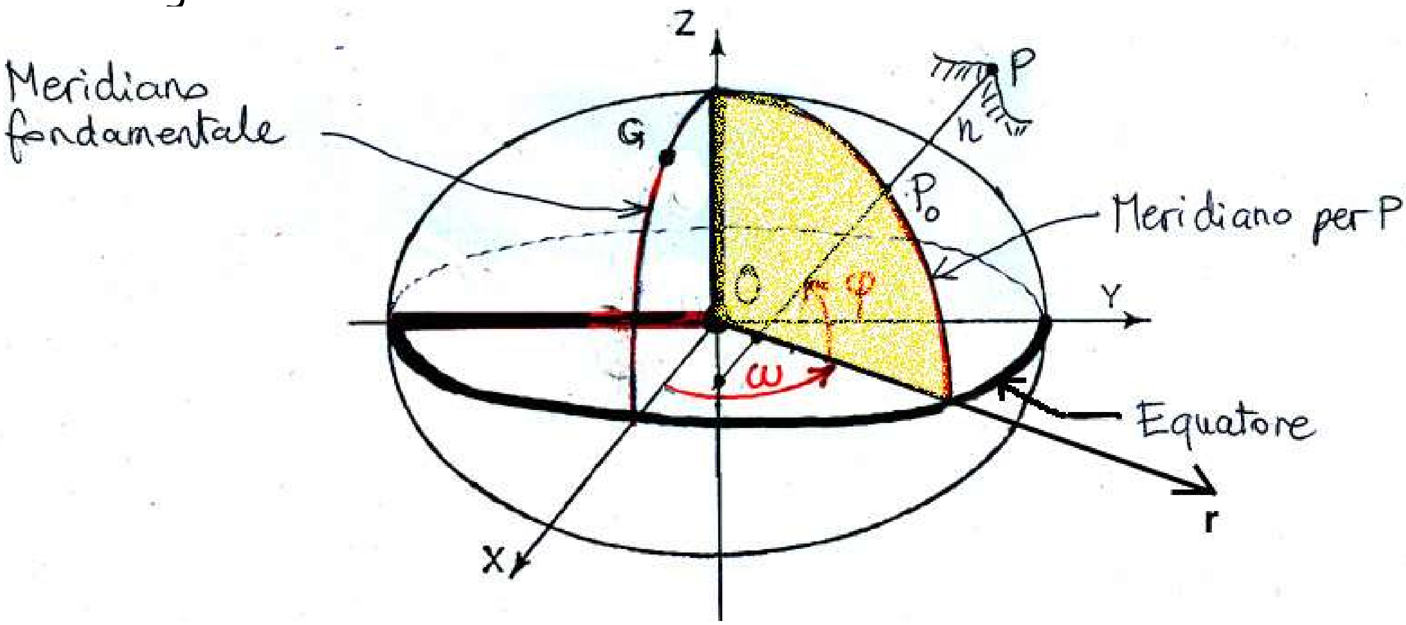
Gli scostamenti tra coordinate geografiche astronomiche ed ellissoidiche sono pari alle componenti Nord e Est della deviazione della verticale (angolo tra verticale e normale ellissoidica):

$$\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_e$$

$$\Delta\omega = \omega_a - \omega_e$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DELL' ELLISSOIDE

Scriviamo le equazioni parametriche assumendo come parametri (coordinate curvilinee) la latitudine φ e la longitudine ω



Consideriamo dapprima l'ellisse meridiana contenuta nel piano meridiano per P (piano r-z) e scriviamone le equazioni parametriche in funzione della latitudine φ

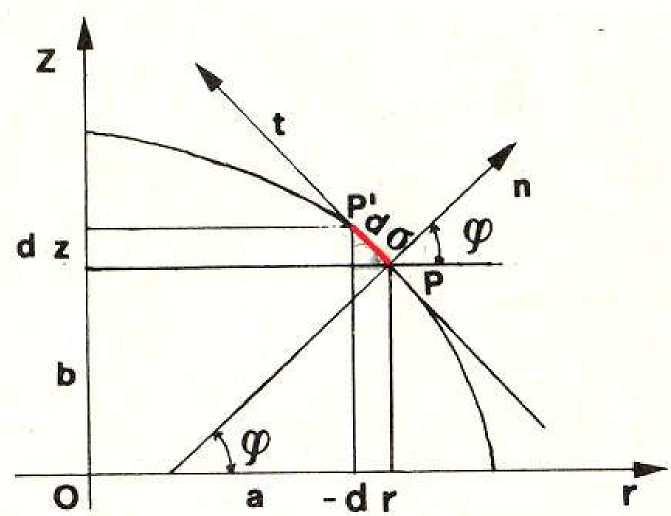


Fig. 2 — L'ellisse meridiana.

Equazioni parametriche dell'ellisse meridiana

$$\begin{cases} r = \dfrac{a \cdot \cos\varphi}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}} = \dfrac{a \cdot \cos\varphi}{W}, \\ z = \dfrac{a(1-e^2)sen\varphi}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}} \end{cases}$$

indicando $W = \sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}$

La prima equazione rappresenta l'espressione del raggio del parallelo in funzione della latitudine φ e dei parametri dell'ellissoide

Proiettando la r sugli assi x ed y ($x = r \cdot \cos\omega$, $y = r \cdot sen\omega$) si ottengono le

EQUAZIONI PARAMETRICHE DELL'ELLISSOIDE:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a \cdot \cos\varphi \cdot \cos\omega}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}} \\ y = \dfrac{a \cdot \cos\varphi \cdot sen\,\omega}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}} \\ z = \dfrac{a(1-e^2)sen\varphi}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}} \end{cases}$$

Che permettono di calcolare le coordinate cartesiane "ellissocentriche" X, Y, Z di un punto P_0 situato <u>sulla superficie dell'ellissoide</u> note le coordinate geografiche di quest'ultimo

RAGGIO DI CURVATURA DEL MERIDIANO

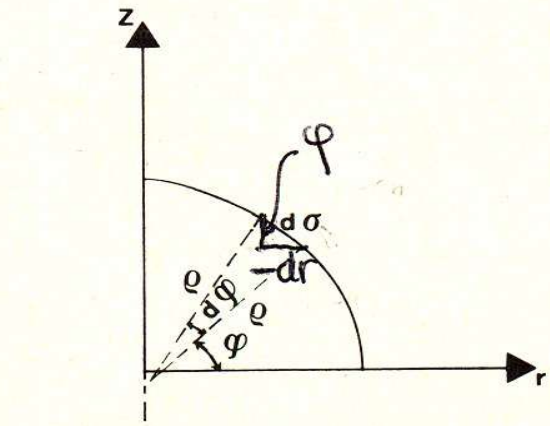


Fig. 4 — Raggio di curvatura del meridiano.

$$\rho = \frac{d\sigma}{d\varphi}$$

$$d\sigma = \frac{-dr}{sen\varphi}$$

$$\rho = -\frac{1}{sen\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$$

da cui si ottiene derivando :

$$\boxed{\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 sen^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}}$$

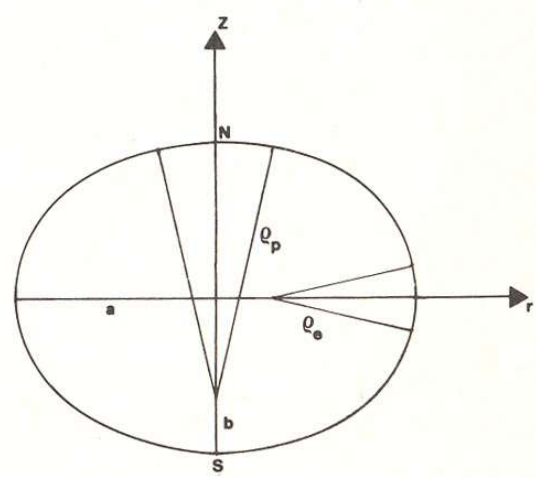


Fig. 5 — Variazione della curvatura del meridiano.

all'equatore $\rho = a \cdot (1 - e^2)$ valore minimo

ai poli $\rho = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$ valore massimo

(detto *raggio di curvatura polare c*)

ARCHI DI CURVE SULL'ELLISSOIDE

Noti i raggi di curvatura del <u>meridiano</u> e del <u>parallelo</u> è possibile ricavare i rispettivi <u>elementi d'arco</u>:

$d\sigma_p = r \cdot d\omega$ arco elementare di parallelo

$d\sigma_m = \rho \cdot d\varphi$ arco elementare di meridiano

Ricordando le analoghe espressioni per una superficie generica, e considerando che le coordinate geografiche sono un sistema ORTOGONALE di coordinate curvilinee, si desume che per l'ellissoide risulta:

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \rho^2 \\ G &= r^2 \\ F &= 0 \end{aligned}}$$

Per cui <u>l'elemento d'arco di una curva generica</u> è dato da:

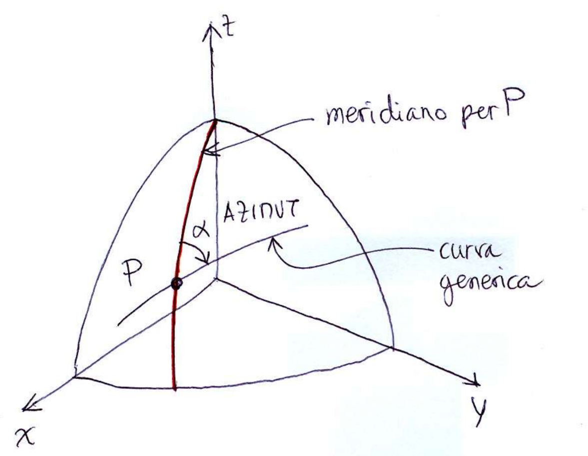
$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\omega^2$$

E le <u>funzioni trigonometriche dell'azimut</u> (**azimut = angolo tra la tangente a una curva e la tangente al meridiano**) risultano:

$$\cos\alpha = \sqrt{E}\frac{du}{ds} = \rho\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{G}\frac{dv}{ds} = r\frac{d\omega}{ds}$$

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du} = \frac{r}{\rho}\frac{d\omega}{d\varphi}$$



LOSSODROMIA

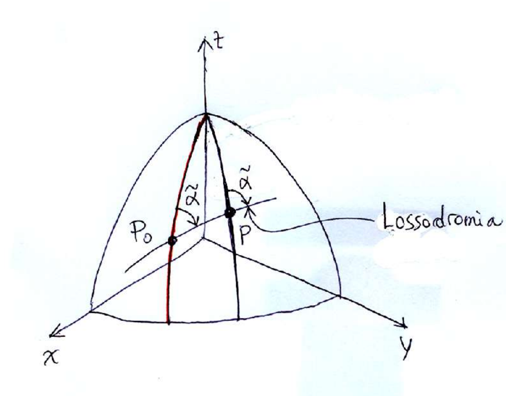
E' la curva che interseca tutti i meridiani con un <u>azimut costante</u> (rotta seguita dai vecchi navigatori).
Non è la rotta più breve (che è la geodetica, ad azimut non costante – vedi seguito).
L'equazione della lossodromia si ottiene come segue:

$$tg\alpha = \frac{r}{\rho}\frac{d\omega}{d\varphi} = tg\tilde{\alpha} = COST$$

$$d\omega = tg\tilde{\alpha}\cdot\frac{\rho}{r}d\varphi$$

integrando :

$$\omega - \omega_0 = tg\tilde{\alpha}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\rho}{r}d\varphi$$



ARCHI FINITI DI PARALLELO E DI MERIDIANO

Si ottengono integrando le espressioni degli elementi d'arco:

$$\sigma_p = \int_{\omega_1}^{\omega_2} r\cdot d\omega = r\cdot(\omega_2-\omega_1) = \frac{a\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2sen^2\varphi}}\cdot(\omega_2-\omega_1)$$

$$\sigma_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\cdot d\varphi = a\cdot(1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(1-e^2sen^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot d\varphi$$

Il secondo integrale non si risolve in forma chiusa ma viene approssimato con uno sviluppo in serie
Se si conoscono le lunghezze di 2 diversi archi di meridiano è possibile ottenere un sistema di 2 equazioni dalle quali ricavare i parametri dell'ellissoide a ed e^2 (metodo degli archi)

SEZIONI NORMALI PRINCIPALI SULL'ELLISSOIDE

I MERIDIANI sono sezioni normali principali dato che ogni piano meridiano è un piano di simmetria

La seconda sezione normale principale si ottiene con un piano normale all'ellissoide e perpendicolare al meridiano, detto PRIMO VERTICALE. Viene anche detta GRAN NORMALE che in realtà è il nome del suo raggio di curvatura (v. sotto)

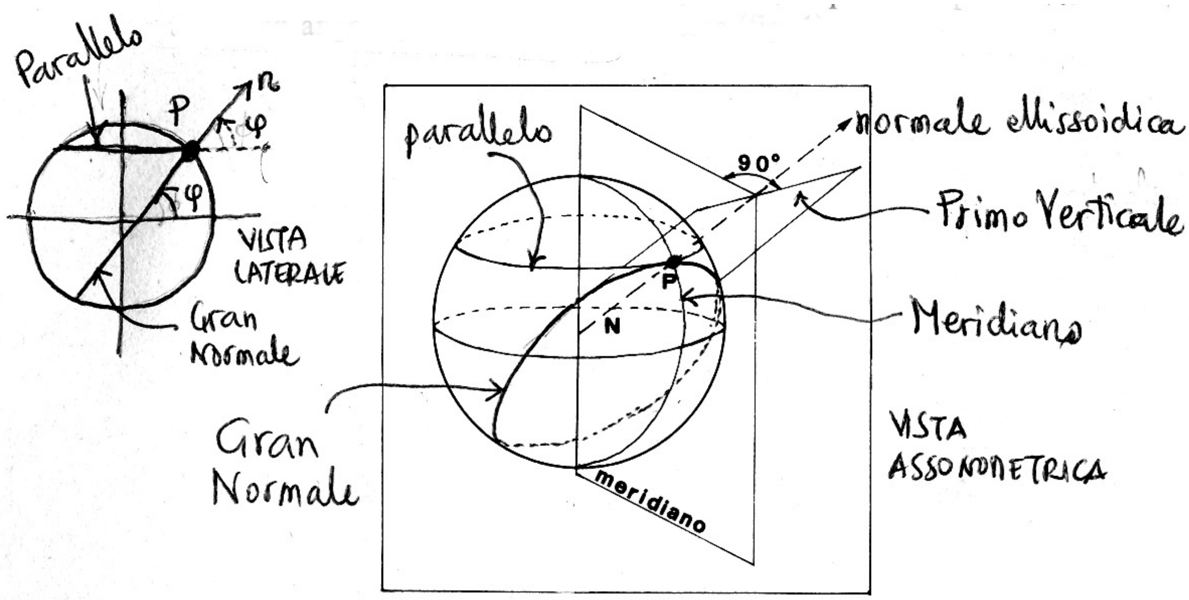


Fig. 1 — Sezioni principali dell'ellissoide di rotazione.

Il raggio di curvatura del meridiano in un punto è stato già determinato. $R_1 = \rho$

Il raggio di curvatura del primo verticale (detto Gran Normale N) si ottiene applicando al primo verticale e al parallelo il teorema di Meusnier:

$$R_2 = N = \frac{r}{\cos\varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi}} = \frac{a}{W}$$

Si dimostra che N è sempre maggiore o uguale a ρ (uguale solo ai poli dove il primo verticale coincide col meridiano, altrimenti sempre maggiore)

SEZIONI NORMALI QUALSIASI

La Formula di Eulero fornisce il raggio di curvatura di una sezione normale qualsiasi avente azimut α:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} = \frac{\cos^2\alpha}{\rho} + \frac{\sin^2\alpha}{N}$$

Il RAGGIO MEDIO DI CURVATURA delle sezioni normali in un punto è dato da:

$$R_m = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{\rho N} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 sen^2\varphi}$$

esso è il raggio della sfera che meglio approssima l'ellissoide nell'intorno di un punto, detta SFERA LOCALE

La formula di Eulero e il teorema di Meusnier permettono di calcolare in un punto il raggio di curvatura di una curva qualsiasi sull'ellissoide:

SEZIONE NORMALE →SEZIONE OBLIQUA →CURVA GOBBA

SEZIONI NORMALI RECIPROCHE

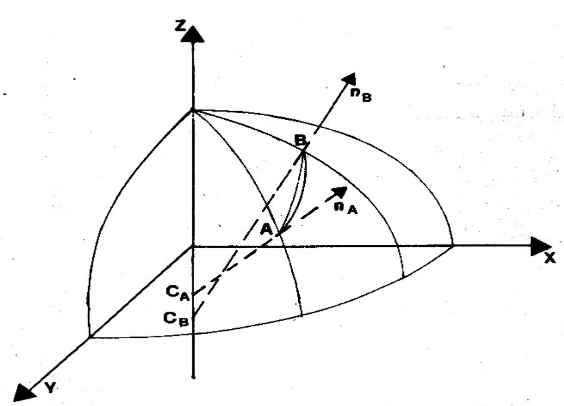


Fig. 1 — Sezioni normali reciproche.

Dati due punti A e B sull'ellissoide non esiste in generale un' unica sezione normale che li contenga ma 2 sezioni normali distinte dette reciproche

LE LINEE GEODETICHE

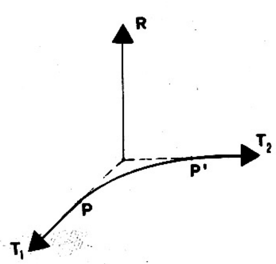
Le sezioni normali non sono adatte a stabilire una geometria sull'ellissoide per l'ambiguità derivante dalla non coincidenza delle sezioni normali reciproche per 2 punti

Si utilizzano invece a tale scopo le LINEE GEODETICHE che non hanno indeterminazione (per 2 punti ne passa 1 e 1 sola)

DEFINIZIONE (per una generica superficie):
Si dice geodetica la curva (in generale gobba) che ha in ogni suo punto <u>la normale principale coincidente con la normale alla superficie</u>

PROPRIETA' delle geodetiche:

1) analogia meccanica: una geodetica tra 2 punti ha lo stesso andamento che assume <u>un filo teso</u> sulla superficie tra i 2 punti, soggetto alla forza di trazione e alla reazione normale, considerando la superficie priva di attrito



2) Una geodetica è la <u>linea di minima lunghezza</u> tracciabile fra due punti su una superficie (N.B. se si considera una limitata estensione)

   Tale proprietà si verifica facilmente per un elemento infinitesimo dal teorema di Meusnier. In pratica una geodetica è una successione di archi infinitesimi di sezione normale, che in ogni punto è la curva di massimo raggio di curvatura e quindi minor lunghezza

Sul PIANO le geodetiche sono <u>segmenti di retta</u>
Su CILINDRO E CONO sono <u>segmenti di retta</u> o <u>eliche</u>
Sulla SFERA sono <u>archi di cerchio massimo</u>
Sull'ELLISSOIDE sono <u>curve gobbe</u> (a eccezione dei meridiani)

EQUAZIONI DELLE GEODETICHE (su una generica superficie)

Esprimendo analiticamente la definizione di geodetica si ottengono le <u>equazioni differenziali delle geodetiche</u>:

$F(x, y, z) = 0$ equazione di una superficie generica

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$ equazione di una curva

se la curva è una geodetica i parametri direttori della sua normale principale devono essere proporzionali a quelli della normale alla superficie:

n sup.

n princ.

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2 y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2 z}{ds^2}}$$ equazione differenziale di una geodetica

(la seconda uguaglianza è conseguenza della prima)

E' una equazione differenziale del 2° ordine che integrata (quasi mai possibile) dà:

$$\begin{aligned} & f(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \\ & F(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Le 2 costanti di integrazione si determinano assegnando 2 condizioni (ad es. 2 punti o 1 punto e 1 azimut).

LE GEODETICHE SULL'ELLISSOIDE

Se la superficie è <u>di rotazione</u> le equazioni si semplificano:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - f(z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \quad \text{per cui:}$$

$$\frac{2x}{\frac{d^2x}{ds^2}} + \frac{2y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = 0$$

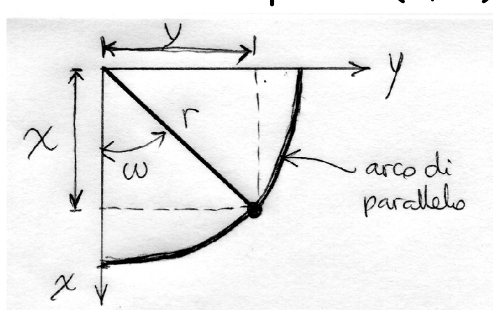
$$x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

che ha un integrale primo dato da: (per verificare basta derivarlo)

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = C_1$$

Esprimendo x e y mediante le coordinate polari (r, ω)

$$\begin{cases} x = r\cos\omega \\ y = r\sin\omega \end{cases}$$



derivando:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dr}{ds}\cos\omega - r\sin\omega\frac{d\omega}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dr}{ds}\sin\omega + r\cos\omega\frac{d\omega}{ds}$$

sostituendo:

$$r\cos\omega\cdot\frac{dr}{ds}\sin\omega + r^2\cos^2\omega\frac{d\omega}{ds} - r\sin\omega\cdot\frac{dr}{ds}\cos\omega + r^2\sin^2\omega\frac{d\omega}{ds} = C_1$$

da cui:

$$r^2\frac{d\omega}{ds} = C_1 \qquad \text{che confrontata con la} \qquad r\frac{d\omega}{ds} = \sin\alpha$$

(f. trig. azimut)

fornisce:

$$\boxed{r\sin\alpha = C_1}$$

Teorema di CLAIRAUT

$$\boxed{r \sin\alpha = C_1}$$

Teorema di CLAIRAUT

Lungo una geodetica, in ogni punto è costante il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'azimut
(N.B. vale per una qualsiasi superficie di rotazione)

Permette di studiare l'andamento delle geodetiche:

- su un CONO o su un CILINDRO si ottengono delle ELICHE
- su un PIANO ($r=\infty$) si ottengono le RETTE (α=cost)

- sull'ELLISSOIDE si ottengono curve ad andamento simile a una sinusoide che procedono sempre da ovest verso est o viceversa (r è positivo e $\sin\alpha$ ha il segno di C_1) e restano comprese tra due paralleli a $r = C_1$

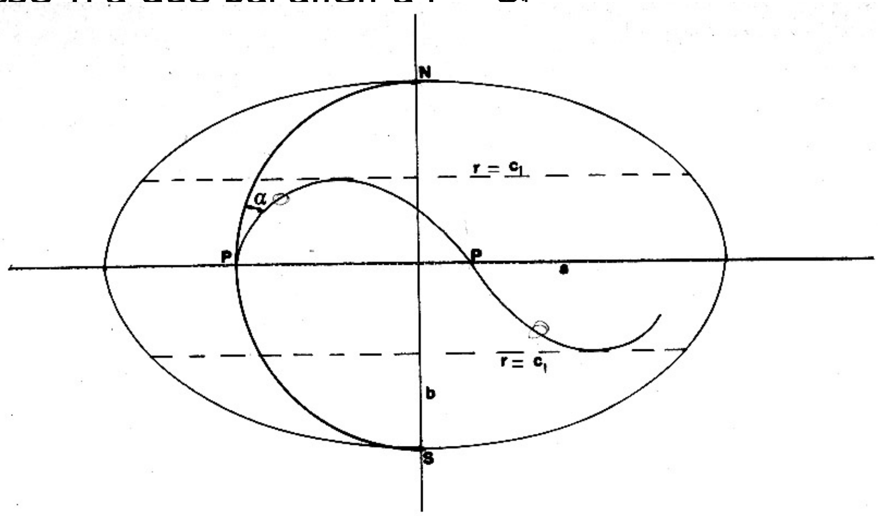


Fig. 2 — Le geodetiche dell'ellissoide di rotazione.

i meridiani sono geodetiche in quanto α = 0° oppure α = 180° per cui il teorema di Clairaut è soddisfatto da C_1 = 0

Il raggio di curvatura di una geodetica in un punto è pari a quello della sezione normale avente uguale azimut (formula di Eulero $R\alpha$) per il teorema sulle curve gobbe

La geodetica New York-Roma: arco di geodetica di circa 6900 km.

E' il percorso più breve (seguito dalle linee aeree)

Si nota come l'azimut non sia costante:
- a New York è circa 50°
- a metà circa del percorso è 90°
- a Roma è circa 130°

L'andamento rispetta il teorema di Clairaut, la geodetica risulta tangente a un parallelo a circa 50° di latitudine