



**Università degli Studi di Perugia  
Facoltà di Ingegneria**

**Corso di Topografia – A.A. 2008/09**

**Prof. Fabio Radicioni**

## **DATUM E COORDINATE NELLA GEODESIA**

Dispensa redatta da:

**Fabio Radicioni**

**Aurelio Stoppini**

# 1. I DATUM GEODETICI

## 1.1. Premessa

Si definisce **datum geodetico**, o semplicemente **datum**<sup>1</sup>, un sistema di riferimento che permette di esprimere in termini numerici la posizione di punti della superficie fisica della Terra o prossimi ad essa. L'operazione con cui si esprime la posizione di un punto o di un oggetto qualsiasi, mediante opportune coordinate in un assegnato datum, prende il nome di **georeferenziazione**.

E' possibile definire un datum geodetico in diversi modi. La definizione ha sempre carattere convenzionale, e nella pratica si ottiene mediante un insieme di punti *materializzati* (cioè fisicamente realizzati, ad es. mediante piastre metalliche fissate a manufatti) sulla superficie terrestre, ai quali vengono attribuiti determinati valori delle coordinate. Tale operazione viene detta *realizzazione* del datum. In sostanza, un datum può essere *definito* teoricamente come si vuole, ma se lo si vuole utilizzare deve essere *realizzato* attraverso punti materializzati sul terreno e misure che permettano di determinare le coordinate di tali punti.

Per le applicazioni geodetiche e cartografiche, compreso l'utilizzo del GPS, si impiegano sistemi di riferimento **solidali con la Terra (Earth-Fixed)**. In un sistema di questo tipo, le coordinate dei punti della superficie terrestre "non variano" nel tempo. In realtà, le coordinate variano nel tempo, per effetto delle deformazioni della crosta terrestre - deriva dei continenti, fenomeni sismici, ecc. - ma lo fanno molto lentamente. La Terra ha un moto con componenti di rotazione, non rettilineo ed uniforme, quindi un sistema Earth-Fixed *non è inerziale*.

In altre applicazioni, come l'astronomia o lo studio del moto dei satelliti, si utilizzano invece sistemi *inerziali*, in cui la Terra risulta essere in movimento. Un sistema di questo tipo non sarebbe utilizzabile per la Topografia perché le coordinate dei punti cambierebbero a velocità grandissima.

La definizione di datum geodetico, come vedremo tra poco, è **tridimensionale**. Nella geodesia moderna, basata sui satelliti, il datum viene utilizzato in modo tridimensionale, mediante le coordinate geocentriche (v. oltre) o le coordinate geografiche associate alla quota ellissoidica.

Nella geodesia classica i datum venivano impiegati solo per la **planimetria**, perché l'altimetria veniva trattata a parte. Si parla in questo caso di **horizontal datum**.

L'**altimetria** espressa mediante le quote *ortometriche* (o *geoidiche*) richiede la definizione di un datum a parte (**vertical datum**) basato su uno zero di riferimento (mareografo) e una rete di livellazione, a cui va poi associato un modello di geoide.

## 1.2. Definizione dei datum nella geodesia classica

Nella geodesia classica, che si basava su misure eseguite a terra, la definizione di datum è fondata sul concetto di *superficie di riferimento*, ossia una superficie matematica ideale sulla quale vengono sviluppati i calcoli geodetici e definiti i sistemi di coordinate.

Nella pratica, la definizione classica di un datum consiste nell'individuare **un ellissoide orientato localmente**. Si sceglie un determinato ellissoide (Hayford, Bessel, ...), e si assumono come noti e privi di errore i suoi parametri di dimensione e forma (ad es. semiasse maggiore e schiacciamento). Questo ellissoide viene poi **orientato** in un dato punto (detto **punto di emanazione**) imponendo che in quel punto si verificano le seguenti tre condizioni geometriche:

- *la normale ellissoidica coincida con la verticale;*
- *la direzione del meridiano ellissoidico coincida con quella del meridiano astronomico;*
- *la quota ellissoidica coincida con quella ortometrica.*

---

<sup>1</sup> *datum* = dal latino, qui va inteso come "ciò che è dato". La scelta del sistema di riferimento è il primo passo per qualsiasi rilievo o realizzazione di cartografia, è a monte di tutto il resto (misure, calcoli, rappresentazione, ...).

Per realizzare in pratica le predette condizioni si opera come segue:

- si determinano le **coordinate geografiche astronomiche** (latitudine e longitudine astronomica) del punto di emanazione, effettuando misure su una serie di stelle note con un teodolite astronomico<sup>2</sup>; si determina rispetto alle stelle anche la direzione del meridiano (*meridiano celeste* o astronomico)<sup>3</sup>;
- le coordinate geografiche astronomiche così calcolate vengono attribuite al punto di emanazione come coordinate geografiche ellissoidiche, e la coincidenza del meridiano si ottiene imponendo per una determinata direzione che l'azimut (angolo contato a partire dal meridiano in senso orario) ellissoidico sia pari a quello astronomico.

Nel datum italiano ROMA 40, ad esempio, l'ellissoide è quello di Hayford, e l'orientamento è stato effettuato a Roma M.Mario (osservatorio astronomico e punto di emanazione della rete geodetica nazionale) con misure astronomiche del 1940. La direzione su cui è stata imposta la coincidenza dell'azimut è il lato M.Mario - M.Soratte della rete geodetica fondamentale.

Nel punto di emanazione, quindi, è **nulla la deviazione della verticale**. In pratica, pertanto, l'ellissoide orientato localmente risulta **tangente al geoide nel punto di emanazione**. Un ellissoide orientato localmente approssima bene la superficie geoidica (ai fini della planimetria) in un intorno del punto di emanazione, fino alle dimensioni di una nazione o anche di una porzione di continente (fig. 1). In questo intorno, la deviazione della verticale si mantiene piccola (al massimo qualche decina di secondi, pari all'errore residuo di verticalità di un teodolite verticalizzato con una livella, v. seconda parte del corso), e può essere in pratica trascurata. Questo è un requisito fondamentale per rendere accurate le misure angolari a lunga distanza, su cui si basava la geodesia classica (v. i cosiddetti Teoremi della Geodesia Operativa)

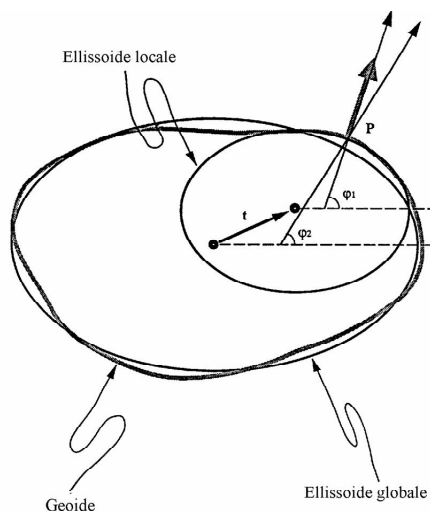


Fig. 1 – Schema delle relazioni tra geoide, ellissoide locale orientato localmente (P è il punto di emanazione) ed ellissoide globale geocentrico [da Beutler]. Già da questa figura si nota come uno stesso punto P abbia, rispetto a due ellipsoidi diversi (cioè in due differenti datum), latitudine (e anche longitudine) diversa.

<sup>2</sup> Per determinare la **latitudine astronomica** un metodo speditivo approssimato (usato storicamente dai naviganti) è quello di misurare l'altezza sull'orizzonte della Stella Polare; in realtà essa non si trova esattamente sul prolungamento dell'asse terrestre, per cui la misura viene ripetuta per una serie di stelle *circumpolari* di posizione nota nel tempo. La determinazione della **longitudine astronomica** si basa sulla determinazione del tempo locale sul meridiano del sito di misura, e il suo confronto con il tempo nel meridiano fondamentale (Greenwich o altro). Occorre un orologio di alta precisione con il quale si misura l'istante esatto in cui una data stella passa sul meridiano locale e lo si confronta con l'orario (dato da tabelle astronomiche) in cui la stessa stella passa sul meridiano fondamentale. I navigatori, dalla metà del '700 in poi (quando furono disponibili orologi di accuratezza adeguata) facevano riferimento al passaggio del sole sul meridiano, che avviene esattamente al mezzogiorno locale, e confrontavano l'ora locale con l'ora di Greenwich data da un orologio di precisione.

<sup>3</sup> Per stabilire la direzione del meridiano celeste un metodo approssimato è quello di collimare la Stella Polare con un cannocchiale e poi inclinarlo mantenendolo sul piano verticale contenente la Polare, che è il piano del meridiano.

Si è detto che, nel concreto, la definizione di datum è legata a una serie di punti materializzati sul terreno, e misurati, che ne costituiscono la **realizzazione**. In pratica, **a ogni datum geodetico è strettamente associata una rete geodetica**, derivante da un dato gruppo punti e di misure, e dal relativo calcolo di compensazione. Il calcolo della rete fornisce le coordinate geografiche ellissoidiche dei suoi vertici nel datum adottato. Pertanto la rete geodetica, mediante le coordinate dei suoi vertici, definisce e materializza, cioè *realizza* l'ellissoide di riferimento fino a distanze notevoli dal punto di emanazione. Va tenuto presente che, derivando da misure e da un successivo calcolo numerico di compensazione, la rete geodetica è inevitabilmente caratterizzata da **deformazioni** dovute agli errori di misura e dalle modalità con cui è stato condotto il calcolo, che nella pratica influenzano la concreta definizione del datum.



Fig. 2 – La rete geodetica fondamentale (I ordine) dell'IGM nella sua conformazione originaria (ca. 1910). Sono evidenziate le 8 basi (lunghezze) misurate e le relative reti di sviluppo. Tutte le altre misure erano costituite da angoli. I collegamenti con la Sardegna, di eccezionale lunghezza (quasi 150 km), vennero eseguiti di notte con potenti proiettori fotoelettrici [da Tonini]

### 1.3. I datum classici utilizzati in Italia

In genere, ogni nazione è dotata di uno o più datum geodetici propri che possiamo definire “storici”, la cui definizione è rimasta valida per molto tempo, anche se oggi quasi ovunque sono stati sostituiti da datum globali (v. par. 1.4). Anche in Italia si è verificata nel tempo una progressiva evoluzione delle reti geodetiche e della cartografia. Ancora oggi, per alcune applicazioni e tipi di carte, si utilizzano varie definizioni classiche di datum, tra cui è necessario conoscere almeno le seguenti:

a) **Datum Roma 40** (detto anche **M.Mario 1940**). Sino alla realizzazione italiana del datum ETRS89 mediante la rete IGM95 (v. oltre) il datum Roma 40 costituiva il *Sistema geodetico nazionale*. Si basa sull'**ellissoide internazionale** (così veniva chiamato quello di **Hayford**) orientato a **Roma** (Osservatorio astronomico di M.Mario) con misure astronomiche del **1940**. Il *meridiano fondamentale* in questo datum è quello di M.Mario; la longitudine est si considera convenzionalmente positiva, e quella ovest negativa. In tempi recenti, per agevolare i confronti con altri datum e le trasformazioni (v. oltre) si utilizza in questo datum anche il meridiano di Greenwich. Per trasformare la longitudine da Roma a Greenwich va sommata algebricamente a quella rispetto a M.Mario una costante pari a **12° 27' 08,400"** (longitudine Est di M.Mario da Greenwich).

La *realizzazione* di questo datum avviene attraverso la **vecchia rete geodetica nazionale**, ovvero la rete di triangolazione dell'IGM (Istituto Geografico Militare, massimo ente geodetico-cartografico dello Stato), distinta in quattro *ordini* (I, II, III e IV). Dal I al IV ordine aumenta progressivamente la densità dei punti mentre ne diminuisce l'accuratezza. Dopo la realizzazione della nuova rete IGM95, la vecchia rete è pressoché priva di manutenzione (salvo i punti comuni alla IGM95) per cui va progressivamente scomparendo.

Per quanto riguarda il suo *utilizzo*, il datum Roma 40 è ancora molto importante in Italia perché è il datum di riferimento della cartografia nazionale IGM realizzata fin quasi all'anno 2000 (fino alla serie DB in cui si è passati a WGS84-ETRS89). È ancora utilizzato in alcune Regioni per la Cartografia Tecnica Regionale, nonché per la cartografia del Catasto limitatamente ad alcune province. Nel datum Roma 40 sono definite le note coordinate piane cartografiche "Gauss-Boaga" (v. cartografia).

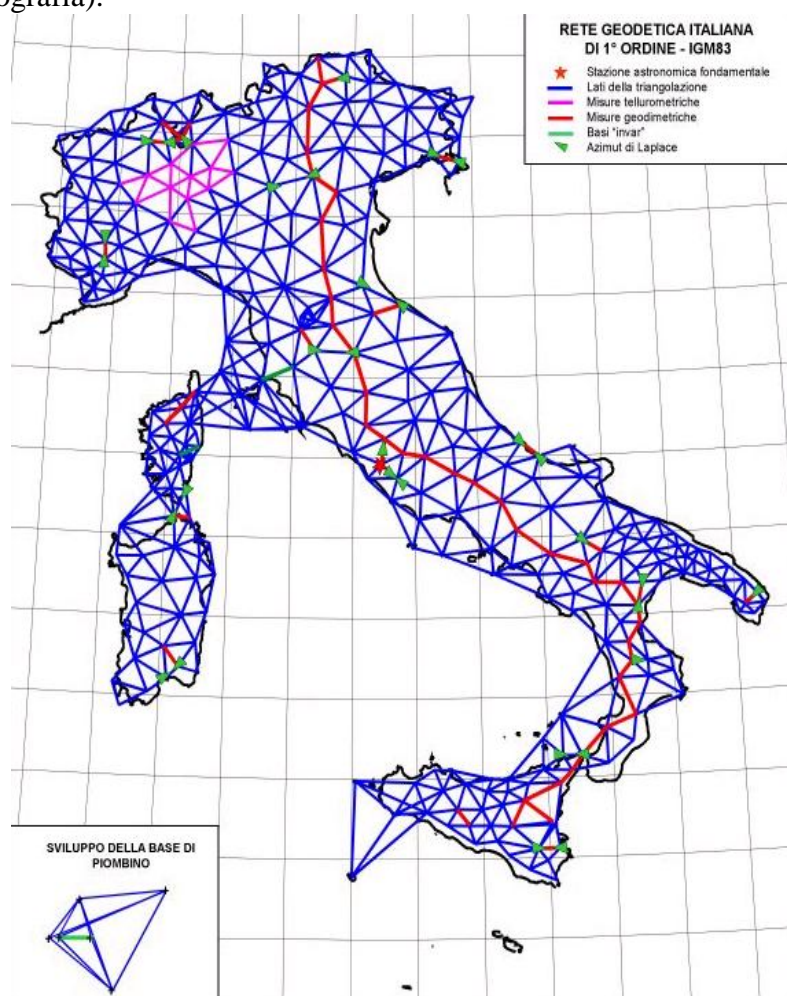


Fig. 3 – La rete geodetica fondamentale (I ordine) dell'IGM nella sua configurazione definitiva (realizzazione IGM83) prima della istituzione della nuova rete IGM95. La rete originaria (fig. 2) è stata integrata nel corso del tempo da misure di distanza eseguite con varie tecniche, e il collegamento con la Sardegna modificato [da sito IGM]

b) **Datum ED 50** (ED = *European Datum*): E' definito mediante l'**ellissoide internazionale (Hayford)** con "orientamento medio europeo" (la deviazione della verticale si annulla a **Potsdam** in Germania, mentre l'orientamento si ottiene dalla media degli azimut misurati in una serie di punti), basato su misure astronomiche e calcoli del **1950**.

Il *meridiano fondamentale* è quello di Greenwich.

La *realizzazione* di ED50 è stata eseguita mediante una **rete europea composta da una selezione di catene di triangoli** estratte dalle reti di primo ordine dei singoli stati dell'Europa occidentale, messe insieme e compensate su uno dei primi computer "moderni" negli Stati Uniti attorno al 1950. La potenza del sistema e del codice di calcolo non era sufficiente a compensare in blocco l'insieme delle reti nella loro integrità, da cui la necessità di questo sfoltimento.

*Impiego*: Per i motivi sopra esposti, la rete che realizza il datum ha un'accuratezza inferiore a quella delle reti nazionali, e non copre tutto il territorio (tra una catena e l'altra restano delle zone scoperte), per cui questo datum è stato impiegato quasi esclusivamente a scopi cartografici, allo scopo di unificare e armonizzare le cartografie europee.

Il datum ED50 viene ancora oggi utilizzato perché le carte IGM anteriori alla serie DB (ovvero quelle prodotte fino al 2000 circa) riportano sovrastampato il reticolato delle coordinate piane U.T.M.- ED50 (v. cartografia). Lo stesso reticolato è presente anche sulla Carta Geologica d'Italia e su altre carte tematiche, per cui è ancora oggi utilizzato dagli utenti di queste carte.

Il datum ED50 è importante anche perché, essendo il primo sistema definito a livello europeo, è stato ed è tuttora utilizzato per il *taglio* (suddivisione in fogli) di tutta l'attuale cartografia IGM (comprese le recenti serie DB) e della Carta Tecnica Regionale. Ciò avviene anche negli altri stati della CE, in virtù di una convenzione ancora in vigore. Per questo motivo il taglio ED50 è anche detto *Sistema Europeo Unificato*.

c) **Datum catastali**. Derivano dai sistemi geodetici (più di uno) adottati nei lavori IGM alla fine del XIX secolo scorso o ai primi del '900. Le definizioni principali impiegano l'**ellissoide di Bessel** orientato a **Genova** (per l'Italia centro-nord, inclusa tutta l'Umbria), a **Castanea delle Furie** (per l'Italia meridionale) o a **Roma M. Mario** (per una parte dell'Italia centrale), ma esistono ulteriori definizioni valide per piccole zone.

Il *meridiano fondamentale* è quello passante per il rispettivo punto di emanazione (Genova, M.Mario o Castanea delle Furie).

La *realizzazione* avviene mediante la **rete di triangolazione catastale** che si basa sulla rete IGM di I, II e III ordine<sup>4</sup> integrata da una rete catastale di raffittimento distinta in tre ulteriori ordini detti *rete, sottorete e dettaglio*.

L'*impiego* dei datum catastali avviene esclusivamente nell'ambito della cartografia catastale italiana. Questa, pur essendo per molti aspetti obsoleta come i datum su cui si basa, è ancora molto utilizzata per almeno due motivi:

- grande scala (1:2000 extraurbana – 1:1000 nei centri urbani) e conseguente ricchezza di dettagli. Per motivi di costo, solo poche regioni hanno realizzato carte tecniche moderne in scala 1:2000, la maggior parte si fermano alla 1:5000;
- quella catastale è l'unica carta a riportare i confini di proprietà, e quindi il suo utilizzo è indispensabile per la redazione di strumenti urbanistici (Piani Regolatori, ecc.) che pongono vincoli su terreni privati, per le espropriazioni di terreni per realizzare opere di pubblica utilità, per i database e i GIS dei Comuni e di altri enti e società erogatrici di servizi.

---

<sup>4</sup> Il IV ordine venne scartato perché non aveva accuratezza sufficiente per la carta del Catasto (che è alla scala 1:2000, mentre la carta IGM arriva al massimo alla scala 1:25000). Le reti dal I al III ordine IGM vennero utilizzate dal Catasto con i valori delle coordinate che avevano all'epoca di formazione del Catasto (tra la fine '800 e i primi del '900). L'IGM ha in seguito adottato il datum Roma 40 ed ha effettuato numerose misure, correzioni e calcoli di aggiornamento della rete che non sono stati recepiti dal Catasto, per cui la geometria della rete catastale può differire (in certe zone anche notevolmente) da quella della rete IGM.

La tabella 1 (allegata alcune pagine più avanti) riassume sinteticamente le definizioni e le caratteristiche dei principali datum geodetici (tradizionali e globali) impiegati attualmente in Italia. Nella parte destra della tabella sono elencate le rappresentazioni cartografiche associate, di cui si parlerà nella parte di cartografia del corso.

Le coordinate dei punti delle reti che realizzano i datum sono riportate in appositi documenti detti **monografie** che contengono anche una descrizione della materializzazione, figure, fotografie, estratti cartografici ed altri elementi utili a ritrovare il punto sul terreno (v. figure seguenti).

### Tavoletta 122 II NE

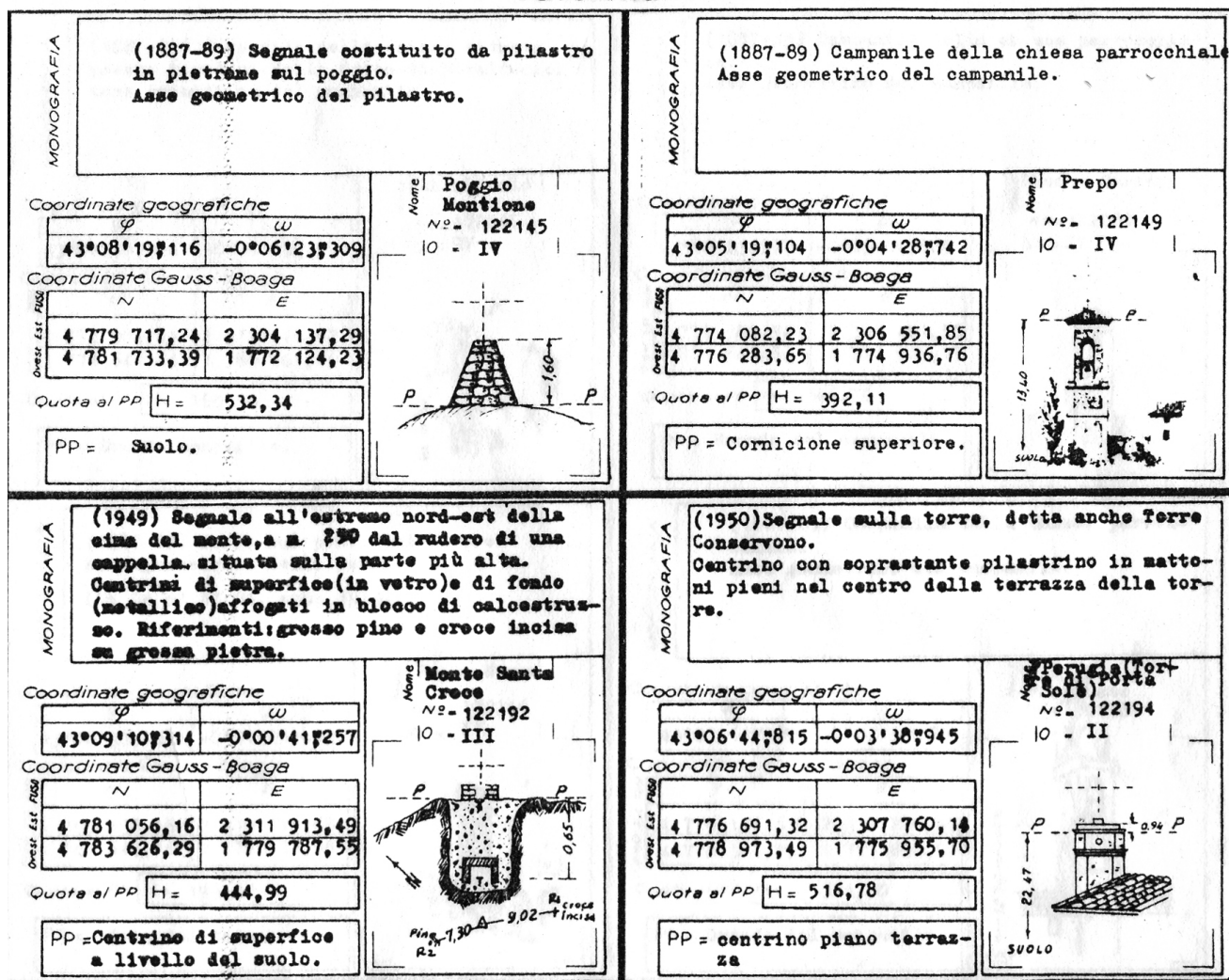


Fig. 4 – Esempi di monografie di vertici trigonometrici IGM della vecchia rete geodetica. Viene indicato il numero del punto (le prime 3 cifre indicano il foglio della carta 1:100.000 in cui ricade il punto), l'ordine (in questo esempio compare un vertice del II ordine, uno del III e due del IV), le coordinate geografiche nel datum Roma40 e le coordinate piane cartografiche Gauss-Boaga calcolate per entrambi i fusi, perché i vertici ricadono nella zona di sovrapposizione (v. la parte del corso sulla Cartografia). La sigla PP indica il "piano di paragone" ovvero il piano a cui è riferita la quota (ortometrica) scritta nella monografia. Alcuni vertici come quello in alto a sinistra hanno una materializzazione precaria, che nel tempo è andata perduta. I punti che si conservano più a lungo sono quelli materializzati su manufatti stabili, come quello in basso a destra. Alcuni vertici, come il campanile in alto a destra, sono visibili ma non stazionabili direttamente (se necessario, si può eseguire una stazione fuori centro).

(1) <u>Agello</u>	ELEMENTI GEODETICI del VERTICE	DATI DI COLLEGAMENTO			
		Vertici	LATI		Azimut.
(2) <u>Rete</u>			Logaritmi	Valori numerici	
Comune di <u>Madgione</u>	Coordinate Geografiche (Elliss. Internaz.)	M. Malte	3.93568		43 12 15
	$\varphi =$	Pengia o.s.	4.13080		68 46 28
	$\lambda =$	V. Bartocchini	3.87428		109 10 52
	Convergenza	Mantali	3.73178		249 39 28
	Coordinate Soldner Origine: <u>M. Pennino</u>	Contel Rigone	4.16547		356 38 17
	$x =$				
	$y =$				
	Coordinate Gauss-Boaga (Fuso di 6°)				
	$x =$				
	$y =$				
	Quota altimetrica				
	$z =$				
Registro Monografie N. <u>8</u> Pagina N. <u>95</u>	Riferimenti planimetrici: <u>Ossel del Campanile della Chiesa Parrocchiale (antica torre ridotta a campanile nel punto più alto delle bonate)</u>				
ELENCO GENERALE	Riferimenti altimetrici:				
Fascicolo <u>11</u> Pagina <u>4</u>	Annotazioni: <u>Punto di 4° ordine dell'I. G. M. determinato come punto di rete.</u>				
Foglio Carta d'Italia N. ....					

(1) Denominazione del vertice trigonometrico.

(2) I. II. III. IV. Ordine I. G. M. - Rete - Sottorete - Dettaglio catastale.

Fig. 5 – Esempio di monografia di un vertice catastale di Rete. Sono presenti solo coordinate piane cartografiche: le Cassini-Soldner (specifiche della cartografia catastale) con origine M. Pennino (datum Bessel Genova), e le coordinate Gauss-Boaga fuso Est (datum Roma 40). Sono riportate anche, in alto a destra, le letture angolari compensate sui punti circostanti della rete. Si tratta di un vertice del IV ordine IGM che il Catasto ha rideterminato come vertice di Rete. Molti vertici di queste reti catastali sono andati perduti o comunque le materializzazioni originarie sono state alterate da demolizioni e ricostruzioni.

#### 1.4. Definizione dei datum nella geodesia satellitare

La geodesia moderna è essenzialmente una geodesia *satellitare*, nella quale la determinazione della posizione di punti della Terra (*posizionamento*) viene eseguita per mezzo di misure su satelliti orbitanti. Un generico sistema satellitare globale per posizionamento viene denominato GNSS (*Global Navigation Satellite System*). Tra i sistemi GNSS, quello oggi più utilizzato è lo statunitense GPS, a cui si aggiunge il sistema russo GLONASS e nel prossimo futuro anche il sistema europeo GALILEO. I diversi sistemi satellitari possono essere utilizzati insieme (*interoperabilità*).

Nella geodesia satellitare è indispensabile ragionare ed eseguire calcoli alla scala globale. Si utilizzano pertanto **datum geodetici di tipo globale**, validi per tutto il mondo, a differenza di quelli della geodesia classica, che come si è visto avevano validità *locale*, anche se a volte per zone molto grandi.

La definizione di un datum globale non è più basata su una superficie di riferimento ma si limita a individuare una **terna di assi cartesiani OXYZ geocentrica**, avente cioè l'origine coincidente con il *centro di massa* della Terra, e **solidale** alla Terra, cioè tale da seguirla rigidamente nel suo moto: per questo, i sistemi geocentrici vengono anche denominati **ECEF (Earth Centered, Earth Fixed)**.

L'asse **Z** coincide con l'asse polare (asse di rotazione medio della Terra); gli assi **X** ed **Y** giacciono sul piano equatoriale, con l'asse **X** diretto secondo il meridiano fondamentale



(Greenwich) e  $Y$  diretto in modo da completare una terna destrorsa (fig. 6).

La definizione, come del resto accade per qualsiasi datum, è *convenzionale*, dato che sia la posizione del geocentro sia la direzione dell'asse polare (quest'ultima variabile nel tempo) devono essere stabilite convenzionalmente. A seconda della costellazione satellitare utilizzata e del tipo di applicazioni, vengono utilizzati diversi datum globali, e la definizione degli stessi deve periodicamente essere variata per adattarsi ai cambiamenti fisici intervenuti nella Terra e nei suoi moti.

Il datum globale più noto e utilizzato attualmente è quello su cui si basa il sistema satellitare GPS: datum **WGS84** (*WGS = World Geodetic System*, sistema geodetico mondiale).

Per analogia con i sistemi classici e per rendere più agevole la georeferenziazione di punti mediante le classiche coordinate geografiche, molto più comode e intuitive di quelle cartesiane geocentriche, alla terna cartesiana viene associato un **ellissoide geocentrico**, avente il centro coincidente con quello della terna stessa ed assi orientati secondo le direzioni  $XYZ$  (si veda ancora la fig. 6).

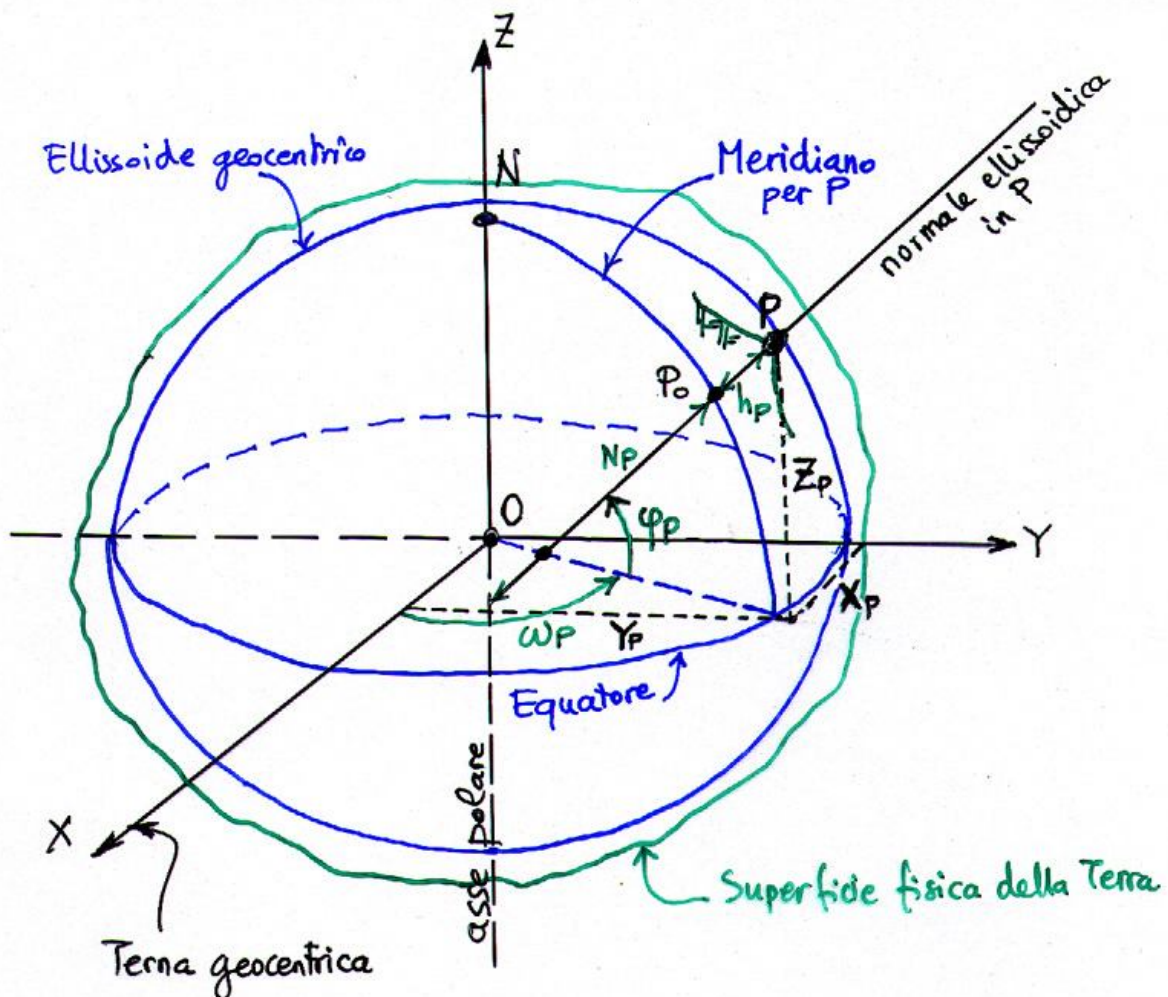


Fig. 6 – Terna geocentrica, coordinate geocentriche, ellissoide geocentrico

Nel sistema WGS84 i parametri dell'ellissoide sono i seguenti:

$$a = 6378137 \text{ m} \quad \alpha = 1/298.2572221$$

La definizione dei datum globali è in realtà più complessa, comprendendo anche una serie di

parametri geofisici (massa della Terra, velocità di rotazione della Terra, ecc.). Ai fini delle applicazioni geodetico-topografiche più comuni, è tuttavia sufficiente conoscere i soli parametri geometrici citati sopra.

Come per i datum classici, per il concreto utilizzo di quelli globali è necessaria una **realizzazione** del datum. Questa avviene sia mediante gli stessi **satelliti**, le cui coordinate vengono determinate in funzione del tempo (*effemeridi orbitali*), sia anche attraverso **punti materializzati a terra**, per i quali vengono stabilite le coordinate analogamente a quanto si faceva nei datum classici. In un datum moderno, satelliti e punti a terra si integrano a vicenda: i punti a terra vengono utilizzati per determinare le orbite dei satelliti, e i satelliti vengono utilizzati per determinare le posizioni dei punti a terra e le variazioni di tali posizioni nel tempo.

Anche ai datum globali, quindi, va associata una *rete geodetica*: data la globalità del datum si tratta di reti internazionali, integrate poi da *reti di raffittimento* a livello nazionale o locale che diffondono il datum sul territorio mettendolo a disposizione di tutti gli utenti. Va precisato che le reti geodetiche attuali si distinguono in due categorie:

- Reti **dinamiche** o **attive**: sono composte da stazioni permanenti, dotate di un ricevitore GNSS attivo 24 ore su 24; le singole stazioni sono collegate a un centro di controllo che archivia e distribuisce i dati acquisiti dalle stazioni e spesso fornisce *servizi di posizionamento* agli utenti. Per queste reti è possibile elaborare soluzioni in continuo, o comunque a intervalli di tempo brevi (ad es. soluzioni giornaliere, settimanali, ...): le coordinate che si ottengono variano nel tempo, a causa delle deformazioni della crosta terrestre. Ogni soluzione di una rete dinamica comprende quindi **coordinate** e **velocità** stimate a una certa data per i punti della rete, con le relative matrici di varianza-covarianza<sup>5</sup>.
- Reti **statiche** o **passive**: sono reti geodetiche simili a quelle tradizionali, costituite da punti materializzati sul terreno o su manufatti e privi di strumentazione. Il rilievo di queste reti richiede l'effettuazione di una campagna di misure: i tecnici vanno a occupare i punti della rete con ricevitori GNSS, per la sola durata necessaria alle misure. Tra una misura e la successiva passano spesso diversi anni, per cui ogni soluzione della rete, costituita dalle sole **coordinate** dei vertici (e le relative matrici di varianza-covarianza), si considera valida per anni. In questo lasso di tempo, l'effetto delle deformazioni della crosta terrestre viene trascurato, cosa che di solito è lecita per la maggior parte delle applicazioni a carattere tecnico, nelle quali più che la posizione assoluta interessa la posizione *relativa* tra i punti della rete, che varia poco nel tempo.

## 1.5. I datum satellitari più utilizzati

### a) Datum WGS84

La definizione di questo datum è stata già data nel paragrafo precedente: terna geocentrica convenzionale, ellissoide WGS84 con orientamento geocentrico. Tra i datum della geodesia satellitare è stato il primo a conoscere un utilizzo di massa, essendo impiegato per il GPS che ha una larga diffusione. E' tuttora il più utilizzato dai tecnici di tutto il mondo, nei sistemi di navigazione e nella maggior parte della cartografia di recente produzione.

La *realizzazione* del datum WGS84 è abbastanza complessa: innanzitutto il gestore del sistema GPS (Ministero della Difesa USA) dispone di una rete di *Stazioni di Tracking*, che si trovano lungo la fascia equatoriale della Terra, dove i satelliti GPS raggiungono le massime altezze sull'orizzonte per cui restano visibili per molte ore. Le stazioni di tracking "tracciano" i satelliti GPS, cioè ne determinano le orbite in continuo, permettendo di calcolare una previsione del tracciato delle orbite

---

<sup>5</sup> I concetti di varianza e matrice di varianza-covarianza verranno esposti nella parte del corso dedicata al trattamento delle osservazioni.

successive. Queste orbite previste vengono poi trasmesse dagli stessi satelliti agli utilizzatori (*broadcast ephemerides*, v. la parte del corso sul GPS), che riescono così a determinare in tempo reale la posizione di ogni satellite. Le applicazioni navigazionali di base del GPS (ad es. i navigatori satellitari delle auto) o rilievi speditivi di accuratezza modesta (qualche metro) vengono effettuate con le sole *broadcast ephemerides*, eseguendo *posizionamenti assoluti* nel datum WGS84, e non richiedono altri punti a terra oltre alle citate stazioni di tracking.

Le applicazioni geodetico-topografiche del GPS richiedono una accuratezza molto maggiore (fino a valori subcentimetrici). Come si vedrà in seguito, una tale accuratezza si può ottenere solo con *posizionamenti relativi*, ovvero determinando differenze di coordinate tra punti noti e punti incogniti. Per fare questo, occorre disporre di punti a terra noti nel sistema WGS84.

In Europa, il datum WGS84 si può considerare, ai fini pratici, coincidente con la realizzazione ETRF89 del datum europeo ETRS (v. oltre). ETRF89 è una soluzione, alla data 1 gennaio 1989, della rete europea dell'EUREF (ente che riunisce i servizi geodetici di tutti gli stati d'Europa). La rete dell'EUREF (fig. 7) è una rete *dinamica* o attiva, composta da stazioni permanenti GNSS; viene per questo denominata **EPN (EUREF Permanent Network)**. Le stazioni permanenti di Perugia (UNPG) e Terni (UNTR) della nostra Facoltà di Ingegneria fanno parte di EPN.

### EUREF Permanent Tracking Network

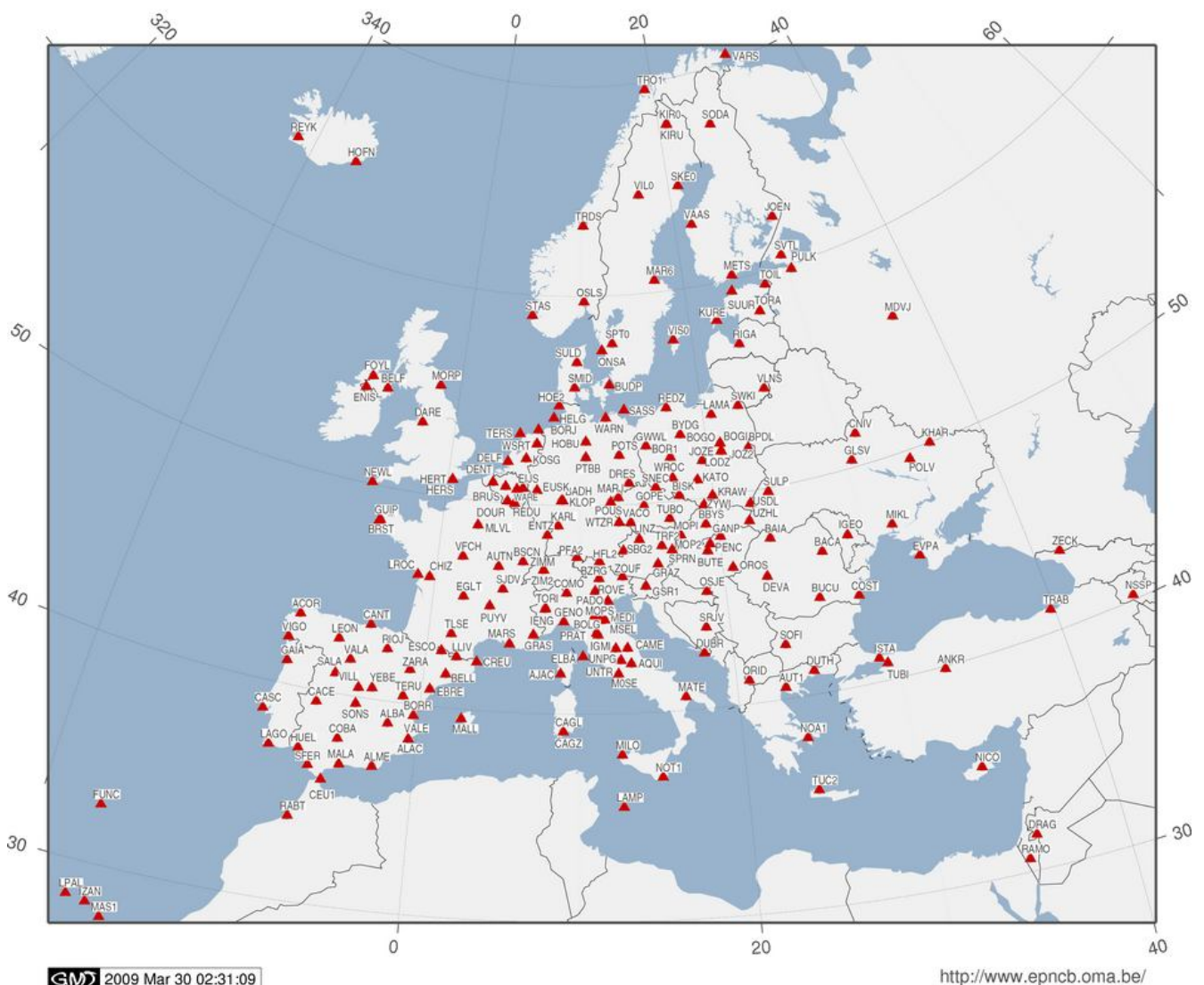


Fig. 7 – La rete europea EPN (EUREF Permanent Network)


Le stazioni della rete EPN che ricadono sul territorio di una singola nazione sono poche (in Italia una ventina circa, con densità particolarmente bassa a sud di Roma), insufficienti per le applicazioni geodetico-topografiche correnti. E' quindi necessario, a livello nazionale e locale, operare un *raffittimento* della rete EPN.

Verso la metà degli anni 1990 l'IGM ha istituito a questo scopo la **Rete IGM95** (fig. 8). Si tratta di una rete *statica* o passiva, composta in origine da circa 1200 vertici distribuiti uniformemente su tutto il territorio italiano, collegata alla rete europea EPN, che all'epoca comprendeva molte stazioni in meno rispetto alla fig. 7. La soluzione di IGM95 pubblicata (coordinate contenute nelle monografie dei vertici) è coerente con la realizzazione ETRF89 del datum europeo ETRS, per cui, tenendo conto che come si è detto ETRF89 è praticamente coincidente in termini di coordinate con WGS84, IGM95 costituisce la prima realizzazione ufficiale italiana del datum WGS84. La rete IGM95 è stata poi ulteriormente raffittita da reti statiche locali ad opera di molte Regioni (tra cui la Regione Umbria – v. fig. 10), e in parte anche del Catasto.

Le coordinate delle reti statiche come IGM95 si considerano costanti nel tempo per lunghi periodi, dell'ordine di diversi anni, trascurando l'effetto delle deformazioni della crosta terrestre. Quando i movimenti accumulati nel corso del tempo raggiungono entità che non sono più trascurabili, si procede a un aggiornamento delle coordinate. Nel 2008 è stato reso disponibile, presso l'IGM, l'aggiornamento delle coordinate IGM95 alla realizzazione ETRF2000 del datum europeo. Le coordinate aggiornate sono più accurate delle precedenti, ma non sono ancora entrate nell'uso comune, poiché la cartografia anche recentissima è georeferenziata in ETRF89.



Fig. 8 – La rete IGM95, attuale rete geodetica fondamentale italiana. La figura (tratta dal sito web dell'IGM) riporta oltre alla rete originaria anche alcuni raffittimenti regionali che l'IGM ha acquisito nel proprio database. Si nota come i vertici siano più densi lungo le linee di livellazione, per determinare le ondulazioni ai fini del geoide ITALGEO.

	<b>OSTERIA DEL GATTO</b>		<b>123703</b>	<b>123</b> NO	
	Nazione: ITALIA Provincia: PERUGIA Comune: FOSSATO DI VICO Carabinieri: FOSSATO DI VICO		Proprietà: Pallucca Indirizzo: Osteria del Gatto Comune: FOSSATO DI VICO Cap: 06022 Tel: 075 919159 Fax: Provincia: PERUGIA		
<b>Materializzazione:</b> Centro del tipo "GPS C" fissato alla sommità di un pilastro costituito da elementi prefabbricati di cemento sile a est del cancello di accesso al laboratorio "Amico del Tarlo", nei pressi del km 195,400 lungo la SS.3.		<b>Geografiche (Roma40)</b> φ: 43°17'13,287" λ: 00°17'50,238" Quota s.l.m.: 416,17	<b>Piane (Gauss-Boaga)</b> φ N: φ E: η N: 4.795.234,96 η E: 2.337.420,18	<b>Geografiche (WGS84)</b> φ: 43°17'15,636" λ: 12°44'57,905" Quota ell.: 461,70	<b>Piane (UTM-WGS84)</b> φ N: φ E: η N: 4.795.221,02 η E: 317.414,02
<b>Accesso:</b>					
<b>Informazioni ausiliarie:</b>					
<b>Vertici collegati:</b> R 0021 ### 044# Contrassegno di tipo Cso Bullone a muro Δll: -1,28		<b>Parametri:</b> Tx: 58,55 Rx: -0,093" Ty: 26,39 Ry: -2,256" K: 33,28 Tz: -72,12 Rz: -0,715" <b>Stazioni astronomiche:</b>			
Segnalizzato: 18/06/92 G1B92 Giacomo Stefanelli Ultimo intervento: Ricognito 13/03/95 G4A95 Luca Rini Mod. IGM95/SM					

ISTITUTO GEOGRAFICO MILITARE - Direzione Geodetica - via Di Novoli, 93 - 50127 FIRENZE - Tel: 055/2775442 Fax: 055/417959

Fig. 9 – Monografia di un vertice della rete IGM95. Sono presenti le coordinate geografiche e piane sia nel datum WGS84 (ETRF89) sia nel datum Roma40, l'altezza ellissoidica e la quota ortometrica. Quest'ultima è misurata direttamente nei vertici collegati a caposaldi di livellazione, mentre è stimata con il geoido ITALGEO per gli altri vertici. In questa versione delle monografie (1997) sono presenti, al centro in basso, i 7 parametri della trasformazione di Helmert (v. oltre) da WGS84 a Roma40, stimati nell'intorno del punto. Nelle edizioni attuali delle monografie IGM95 tali parametri sono stati rimossi, in quanto la trasformazione viene ora eseguita per mezzo di *grigliati*.

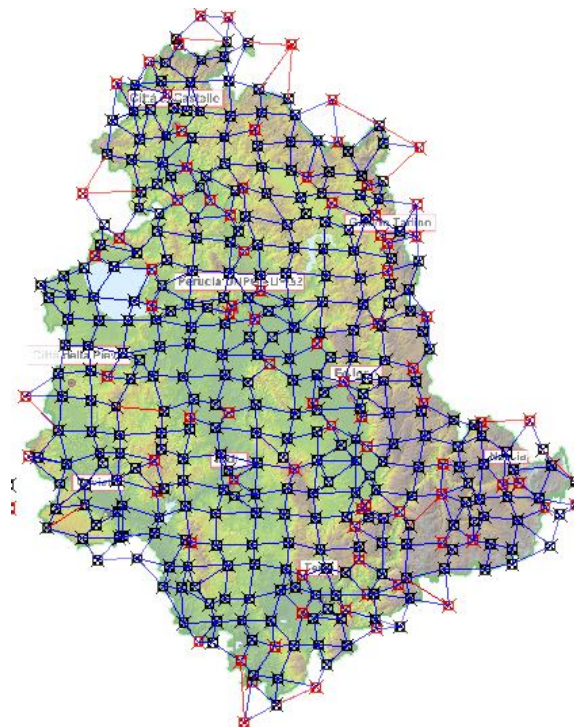


Fig. 10 – La rete geodetica statica di raffittimento della IGM95 nella Regione Umbria. realizzata nel 2006: comprende circa 300 nuovi vertici di cui circa 60 sono collegati a linee di livellazione ed hanno permesso la stima di un geoido umbro, affinamento di ITALGEO2005

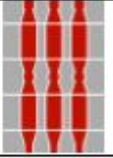

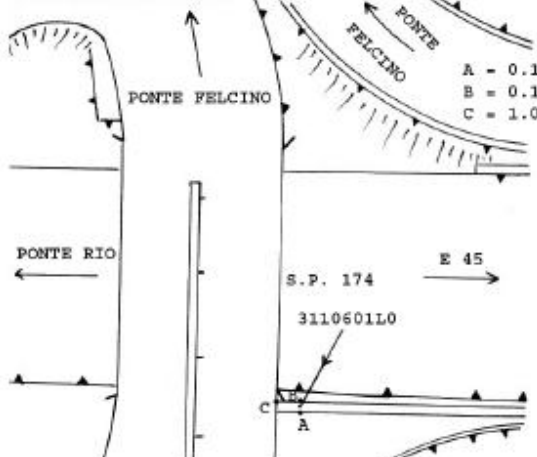
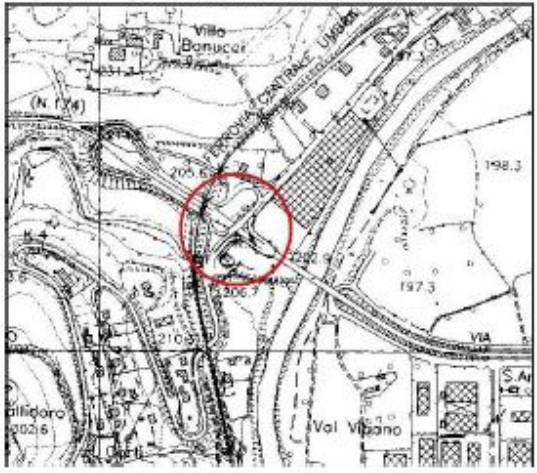
 <b>REGIONE UMBRIA</b> DIREZIONE AMBIENTE, TERRITORIO E INFRASTRUTTURE – II° SERVIZIO RETE GEODETICA PLANOALTIMETRICA DELLA REGIONE UMBRIA RAFFITTIMENTO DELLA RETE FONDAMENTALE IGM95 – Rilievo Aprile 2006 –			
<b>Comune:</b> Perugia <b>Provincia:</b> Perugia	<b>Indirizzo:</b> Corso Vannucci, 19	<b>Nome:</b> PONTE FELCINO <b>Punto N°:</b> <b>3110601L0</b>	
<b>Accesso:</b> Dalla superstrada E45 uscire a Ponte Felcino e percorrere la S.P. 174 di Ponte Felcino e al Km 4+600 girare a destra per Ponte Felcino. Il punto si trova sul ponte.		<b>Materializzazione:</b> Centrino infisso sul cordolo in calcestruzzo della scolina sulla sommità della spalla del sovrappasso in località Ponte Felcino, nei pressi dell'ex lanificio "Icon".	
			
<b>WGS84 (ETRF89)</b>	<b>Geografiche</b>	<b>Piane</b>	<b>Riferimenti Cartografici:</b> Sezione CTR (Regione Umbria): 311.060 Serie 25 (IGM): 311-IV Serie 25V (IGM): 122-II-NE
	$\varphi$ : 43° 07' 39,2770" $\lambda$ : 12° 25' 59,7183"	N: 4.778.180,265 m E: 291.217,541 m UTM WGS84 - Fuso 33	
	<b>ROMA40</b>	$\varphi$ : 43° 07' 36,9315" $\lambda$ : 12° 26' 00,4814" GAUSS BOAGA - Fuso Est	
<b>UTM ED50</b>	$\varphi$ : 43° 07' 42,8119" $\lambda$ : 12° 26' 03,0649"	N: 4.778.373,327 m E: 291.286,903 m UTM ED50 - Fuso 33	<b>Estratto di CTR 1:10.000</b> 
<b>Altezza ellissoidica:</b> 251,581 m			
<b>Quota ortometrica:</b> 204,562 m			
<b>Caposaldo:</b> IGM CSO' 121/78			
<b>Dislivello misurato:</b> 0,432 m			
<i>Revisione finale eseguita dall'Università di Perugia – Laboratorio di Topografia e Fotogrammetria (D.I.C.A.)</i>			

Fig. 11 – Monografia di un vertice della rete di raffittimento IGM95 della Regione Umbria. Sono presenti le coordinate geografiche e piane in tre datum: WGS84 (ETRF89), Roma40 ed ED50, l'altezza ellissoidica e la quota ortometrica.

Quest'ultima è misurata direttamente nei circa 60 vertici collegati a caposaldi di livellazione (come quello della monografia qui riprodotta), mentre è stimata con il geode "Umbria 2008" per gli altri

In Italia sono state realizzate anche numerose reti *dinamiche* o attive, ad opera soprattutto delle Regioni ma anche di altri soggetti pubblici e privati. Ad esempio, la Regione Umbria insieme all'Università di Perugia ha realizzato nel 2006 la rete permanente regionale GPSUMBRIA ([www.gpsumbria.it](http://www.gpsumbria.it)) composta da 12 stazioni a copertura di tutto il territorio umbro (fig. 12). La rete GPSUMBRIA è stata georeferenziata nel datum ETRF89, del quale costituisce una ulteriore realizzazione, molto apprezzata dagli utenti tecnici che ora possono operare anche con un solo ricevitore utilizzando come riferimento questa rete<sup>6</sup>.

E' attualmente in corso il coordinamento delle diverse reti dinamiche regionali, mediante l'istituzione, da parte dell'IGM e di alcune Università, della nuova **Rete Dinamica Nazionale (RDN)**, composta da un sottoinsieme delle stazioni regionali. A regime, questa rete migliorerà notevolmente l'accuratezza della realizzazione di tutti i datum satellitari in Italia.



Fig. 12 – La rete GNSS permanente umbra, denominata GPSUMBRIA, istituita nel 2006 da Regione Umbria e Università degli Studi di Perugia e potenziata nel 2009 con due nuove stazioni e servizi in tempo reale

<sup>6</sup> Con una rete statica, l'utente necessita di almeno due ricevitori GNSS, uno dei quali viene posto su un vertice della rete mentre l'altro va ad occupare i punti incogniti da rilevare.


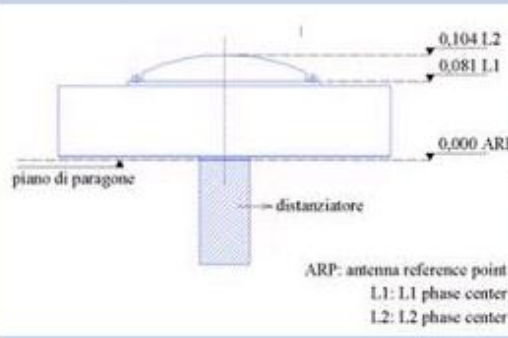

 <b>REGIONE UMBRIA</b>		<b>RETE DI STAZIONI PERMANENTI GNSS DELLA REGIONE UMBRIA</b>	
<b>Comune: Orvieto</b> Provincia: Terni		<b>Indirizzo:</b> Centro Studi Città di Orvieto Piazza Duono, 20 Orvieto	
		<b>Nome: UNOV</b> <b>Punto N°:</b>	
<b>Particolari della materializzazione:</b>		<b>Descrizione:</b> Pilastro in acciaio inossidabile, ancorato tramite flange bullonate alla muratura ed emergente dalla copertura a tetto dell'ex ospedale di Orvieto, ora Centro Studi Città di Orvieto	
 <p>ARP: antenna reference point            L1: L1 phase center            L2: L2 phase center</p>		<b>Ricevitore:</b> Topcon Odyssey-RS (GPS + GLONASS) <b>Antenna:</b> Topcon CR-3 GGD con radome cod. IGS: TPSCR3_GGD CONE offset verticale base antenna - marker = 0.000 m	
<b>Fotografia:</b> 		<b>Coordinate geografiche WGS84 (ETRF89):</b> $\varphi$ : 42° 42' 57,0700" $\lambda$ 12° 06' 47,2466" h : 379,72 m	
		<b>Coordinate UTM - WGS84 (fuso 33):</b> N: 4733303,238 m E: 263606,003 m	
		<b>Coordinate geografiche Roma40:</b> $\varphi$ : 42° 42' 54,7214" $\varphi$ : -0° 20' 20,3579"	
		<b>Coordinate Gauss - Boaga (Fuso Est):</b> N: 4733315,132 m E: 2283610,773 m	
		<b>Coordinate geografiche ED50:</b> $\varphi$ : 42° 43' 00,6" $\lambda$ 12° 06' 50,6"	
		<b>Coordinate UTM-ED50 (fuso 33):</b> N: 4733495 m E: 263673 m	
		<b>Coordinate Geografiche ITRF2000 (IGb00)</b> <b>epoca di riferimento 23.10.2005:</b> $\varphi$ : 42° 42' 57,0822" $\lambda$ 12° 06' 47,2605" h : 379,57 m	
		<b>Quota s.l.m.:</b> 331,19 m	
		<b>Caposaldo collegato:</b> - (stimato con geoidi ITALGEO 99)	
		<b>Riferimenti cartografici:</b> Sezione CTR 1:10.000 (R.Umbria): Sezione 334.060 Serie 25 (IGM): Tavoletta 130 III SE Serie 25V (IGM): .....	

Fig. 13 – Monografia di una stazione permanente (Orvieto) della rete dinamica GPSUMBRIA. L'antenna GNSS è montata in modo permanente ed è collegata a un ricevitore che resta sempre in funzione.



## b) Datum ITRS

Il datum ITRS (*International Terrestrial Reference System*) è il più importante a livello scientifico tra i datum globali. Si tratta di un datum *dinamico*<sup>7</sup>, basato su una terna geocentrica, la cui definizione iniziale coincideva con quella del WGS84, ma successivamente se ne è andato discostando perché le coordinate e velocità dei punti che lo realizzano vengono ricalcolate frequentemente e variano nel tempo seguendo le deformazioni della crosta terrestre (deriva dei continenti ed altri fenomeni geofisici).

Il datum ITRS è realizzato e mantenuto dallo IERS (*International Earth Rotation Service*)<sup>8</sup>. La realizzazione avviene mediante una rete mondiale di stazioni permanenti, comprendenti non solo ricevitori GNSS ma anche altri tipi di sensori (VLBI, LLR, SLR, e DORIS). Le soluzioni periodiche di questa rete costituiscono le *realizzazioni* o *frame* di ITRS e vengono denominate **ITRFxxxx** (*International Terrestrial Reference Frame xxxx*), dove xxxx indica l'anno a cui la soluzione si riferisce. La realizzazione più recente è la **ITRF2005**. Le coordinate e velocità delle stazioni ITRF2005 calcolate per una data scelta dall'utilizzatore vengono fornite a richiesta dallo IERS mediante il proprio sito web (v. fig. 14), sotto forma di tabella o di files SINEX (file di coordinate e velocità in formato standard).

Un sottoinsieme della rete IERS, costituito dalle sole stazioni GNSS, è denominato **rete IGS** (*International GNSS Service*) – fig. 13. Le soluzioni di questa rete vengono elaborate con maggior frequenza rispetto a quelle ITRF, e forniscono ulteriori realizzazioni, più aggiornate, del datum ITRS. La realizzazione di ITRS più recente ad opera di IGS è denominata **IGS05**.

Oltre alle realizzazioni aggiornate del datum ITRS mediante la propria rete, l'IGS produce anche *effemeridi precise* per i satelliti GPS e GLONASS, che permettono di ottenere posizionamenti più accurati rispetto alle effemeridi broadcast comunemente usate.

### The IGS Tracking Network

Click on a boxed region to open a closeup map  
Click on a site label for information on that site

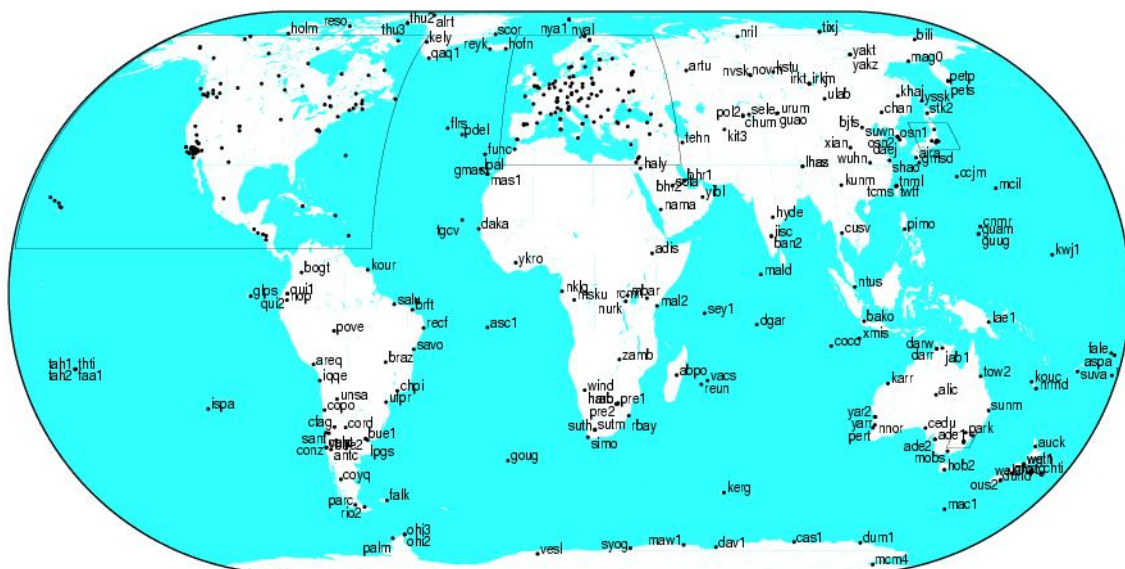


Fig. 13 – La rete mondiale IGS

<sup>7</sup> Intendiamo con *dinamico* un datum in cui si tiene conto dei movimenti dei punti dovuti alle deformazioni della Terra. In pratica alle tre dimensioni spaziali viene aggiunta la quarta dimensione, il *tempo*. Le coordinate sono sempre riferite a una ben precisa data, e sono accompagnate da una stima delle componenti di *velocità*  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  del punto.

<sup>8</sup> Lo IERS è una istituzione mondiale creata nel 1988 per definire e mantenere due sistemi di riferimento: l'ICRS (*International Celestial Reference System*) che è un sistema astronomico inerziale, e l'ITRS che è un sistema ECEF, solidale alla Terra.

Il datum ITRS trova applicazione soprattutto a livello scientifico, principalmente negli studi di Geofisica, consentendo una descrizione molto accurata delle deformazioni della crosta terrestre.

La grande accuratezza e aggiornamento temporale delle coordinate in questo datum, unitamente al fatto che le coordinate a terra risultano perfettamente coerenti con quelle satellitari date dalle effemeridi precise, fa sì che questo datum sia utilizzato anche da molti gestori di reti GNSS dinamiche regionali che erogano servizi di posizionamento, perché permette di ottenere la massima precisione nel calcolo continuo della rete.

L'utenza tecnica, tuttavia, trova ancora difficoltà a utilizzare questo datum in cui le coordinate sono dinamiche, associate a una data precisa, e variano nel tempo. Quando si forniscono servizi di posizionamento in ITRS è quindi necessario dare all'utente anche i parametri di trasformazione per passare al datum comunemente utilizzato nella cartografia, ETRF89-WGS84, coerente con le coordinate della rete IGM95.

Maggiori informazioni su ITRF e IGS possono essere reperite nel sito web <http://igsceb.jpl.nasa.gov/>

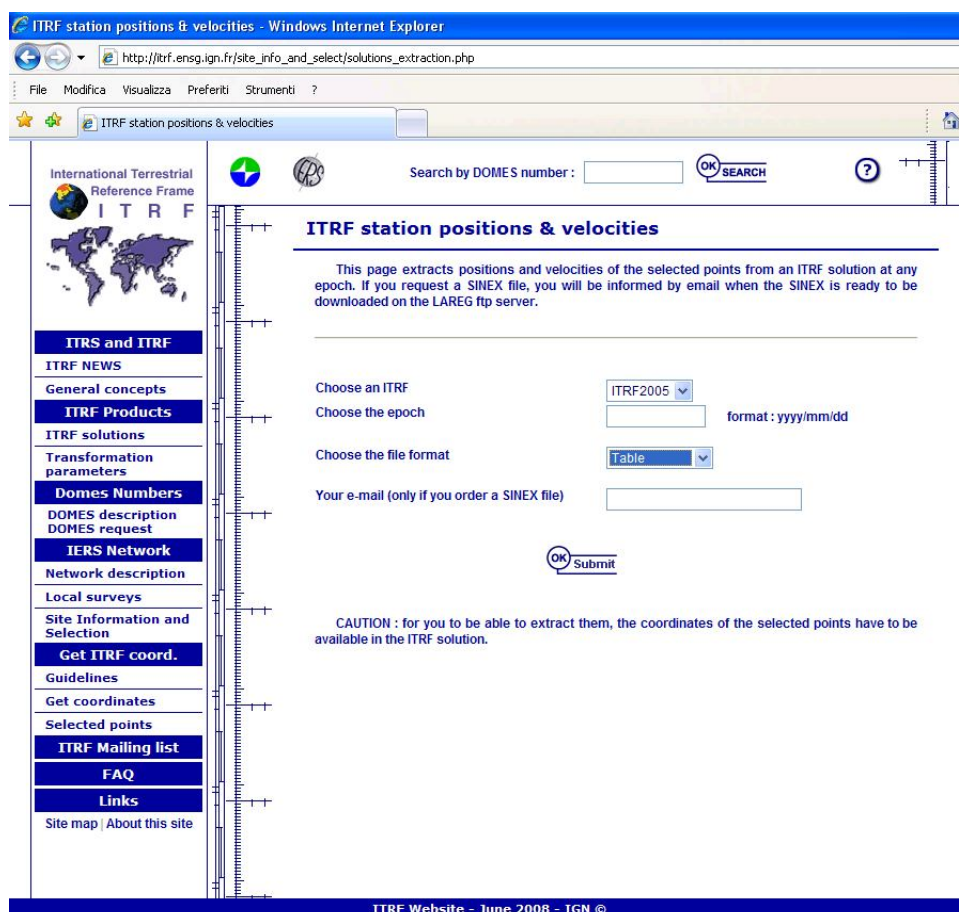


Fig. 14 – Il sito dello IERS, da cui è possibile ottenere coordinate e velocità ITRFxxxx riferite a una qualsiasi data

### c) Datum ETRS

Il datum ETRS (*European Terrestrial Reference System*) è un datum dinamico definito in modo analogo ad ITRS, caratterizzato quindi da coordinate variabili nel tempo. C'è però una importante differenza: ETRS è *vincolato alla piattaforma continentale europea*. Le soluzioni ottenute vengono rototraslate a minimi quadrati sulle coordinate delle soluzioni precedenti, per cui la rete risulta solidale alla piattaforma europea, la segue nei suoi movimenti *complessivi* di deriva. Le variazioni di coordinate dei punti nel tempo in ETRS sono dovute solo ai movimenti *relativi* tra un punto e

l'altro, non ai movimenti d'insieme del continente come avviene invece in ITRS. Si tratta quindi di variazioni molto più lente, di velocità molto più piccole rispetto a quelle di ITRS. In altre parole, le coordinate ETRS sono molto più stabili nel tempo rispetto a quelle ITRS, e ai fini pratici possono anche essere considerate costanti per parecchi anni, come viene fatto ad esempio per la rete IGM95.

Il datum ETRS è mantenuto a cura dell'EUREF, istituzione sovranazionale di cui si è già detto (comprende l'IGM e gli altri analoghi enti geodetico-cartografici di tutte le nazioni europee, oltre a molte sedi universitarie). La rete associata al datum ETRS è la **rete dinamica europea EPN (EUREF Permanent Network)**, di cui già si è detto (v. fig. 7), composta da stazioni permanenti GNSS, una ventina delle quali ricadono in territorio italiano. In Italia e anche nelle altre nazioni sono stati realizzati raffittimenti di questa rete, sia con reti statiche (in Italia, come si è visto, la rete IGM95 e gli ulteriori raffittimenti operati da Regioni e Catasto), sia con reti dinamiche nazionali (RDN) e/o regionali (GPSUMBRIA, ...).

Le *realizzazioni* europee di ETRS, come nel caso di ITRS, sono soluzioni della rete EPN calcolate a una certa data e considerando un assegnato insieme di stazioni. Esse vengono calcolate periodicamente dall'EUREF e denominate **ETRFxx (European Terrestrial Reference Frame xx)**. Tra le realizzazioni di ETRS, la più utilizzata è tuttora la ETRF89, che come già è stato detto si può considerare coincidente con WGS84 e in Italia è ulteriormente realizzata dalla rete IGM95. La successiva realizzazione ETRF2000 sta iniziando a diffondersi ma è ancora destinata prevalentemente a impieghi scientifici o alla gestione di reti permanenti.

Maggiori informazioni su EUREF, ETRS e la rete EPN possono essere reperite nel sito web <http://www.euref.eu/>

## 1.6. Considerazioni conclusive sui datum geodetici

La tabella riportata alla pagina seguente fornisce un sintetico riepilogo delle principali caratteristiche dei datum più utilizzati attualmente, con riferimento ai lavori geodetici e topografici eseguiti in Italia. I datum WGS84, ITRS ed ETRS hanno un impiego globale esteso a tutto il mondo per i primi due, al continente europeo per il terzo.

Si sottolinea il fatto che la conoscenza del datum utilizzato per esprimere la posizione di un punto, o per georeferenziare una carta, è di importanza fondamentale. Come mostra la figura 15, infatti, **uno stesso punto riferito a due diversi datum ha coordinate diverse**, con differenze che possono essere anche di centinaia di metri. Quando si forniscono le **coordinate** di un punto, è quindi "obbligatorio" **specificare sempre il datum a cui sono riferite**.

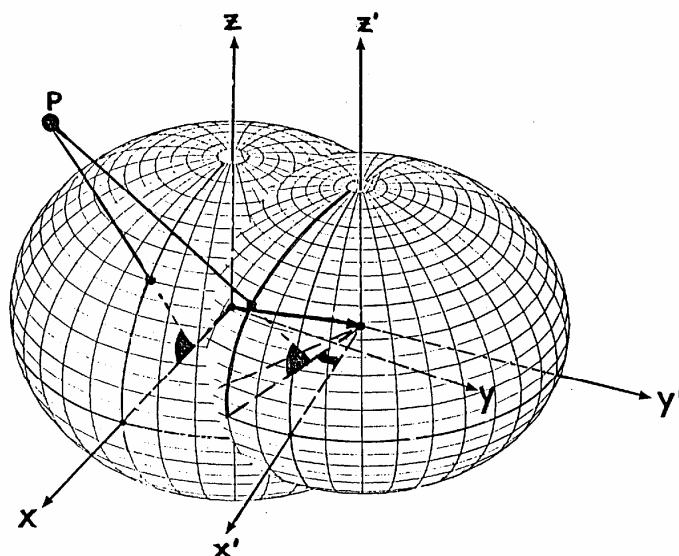


Fig. 15 – Schema delle relazioni tra due differenti datum (gli scostamenti sono volutamente esagerati)

	DATUM GEODETTICI			REALIZZAZIONI			SISTEMI CARTOGRAFICI			
	Denominazione	Ellissoide	Orientamento	Meridiano fondamentale	Rete	Epoca	Tipo	Denominazione	Rappresentazione	Zone per l'Italia
DATUM CLASSICI	<b>ROMA 40</b>	Internazionale (Hayford)	Roma M. Mario 1940	Roma M. Mario (o Greenwich)	Vecchia rete geodetica IGM I, II, III e IV ordine	1880-1995	Triangolazione integrata da distanze	<b>GAUSS-BOAGA</b>	Gauss cilindro secante	Fuso Ovest (1) Fuso Est (2)
	<b>ED 50</b>	Internazionale (Hayford)	Potsdam ca. 1950	Greenwich	Sottoinsieme delle reti nazionali europee	ca. 1950	Triangolazione integrata da distanze	<b>UTM-ED50</b>	Gauss cilindro secante	Fuso 32 Fuso 33 Fuso 34
	<b>DATUM CATASTALI</b>	Bessel	Vari: Genova, Roma, Castanea delle Furie	Vari: Genova, Roma, Castanea delle Furie	Rete IGM di I, II e III ordine + Reti catastali	ca. 1880 - 1940	Triangolazione e raffittimenti	<b>SISTEMI CATASTALI</b>	Cassini-Soldner	31 "grandi" e ca. 800 piccoli sistemi
DATUM SATELLITARI	<b>WGS84</b>	WGS84	Geocentrico	Greenwich	Satelliti + tracking USA Rete EPN (Europa) Rete IGM95 (Italia)	1984 → 1989 → 1995 →	GPS GNSS GPS	<b>UTM-WGS84</b>	Gauss cilindro secante	Fuso 32 Fuso 33 Fuso 34
	<b>ITRS</b>	WGS84	Geocentrico	Greenwich	ITRFxx IGSxx	1992 →	vari sensori incl. GNSS solo GNSS	utilizzo quasi esclusivo per la Geodesia		
	<b>ETRS</b>	WGS84	Geocentrico	Greenwich	ETRFxx (rete EPN)	1989 →	GNSS	<b>UTM-ETRF89</b>	Gauss cilindro secante	Fuso 32 Fuso 33 Fuso 34

**Tabella 1 – Riepilogo dei principali datum utilizzati in Italia**

## 1.7. I datum altimetrici (vertical datum)

I datum geodetici visti sinora consentono di definire la posizione planimetrica dei punti della Terra mediante le coordinate geografiche, e quella altimetrica mediante l'altezza ellissoidica riferita all'ellissoide del datum.

Nelle applicazioni ingegneristiche e nella cartografia l'altimetria viene però espressa mediante la **quota ortometrica** (o *geoidica*, detta anche nel linguaggio comune "sul livello del mare" – s.l.m.), riferita come sappiamo al geoido. E' quindi necessario definire un datum specifico per la sola altimetria basata sulle quote ortometriche, che viene detto **datum altimetrico** o **vertical datum**.

La *definizione* di un datum altimetrico consiste sostanzialmente nella individuazione di un punto al quale convenzionalmente si assegna la **quota zero**. Questo viene fatto in pratica mediante un **mareografo**. Si tratta di uno strumento (v. schema in figura 16) che rileva in continuo le variazioni del livello idrico in un pozzo situato in porto marino e posto in collegamento idrostatico (mediante un condotto dotato di strozzature per eliminare l'effetto dei moti ondosi) con il mare. Le variazioni del livello che si osservano nel pozzo sono giornaliere (maree), stagionali, e di periodo più lungo (legate alle variazioni climatiche). Lo zero è definito convenzionalmente come livello medio del mare in un assegnato periodo, e riportato mediante misure di livellazione a un caposaldo fondamentale che è un punto materializzato stabilmente e situato nelle immediate vicinanze del mareografo.



Fig. 16 – Schema di mareografo, caposaldo fondamentale e rete di livellazione

**ISPRa**  
Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale

**RETE MAREOGRAFICA NAZIONALE**

HOME PAGE  
INFORMAZIONI  
STAZIONI  
SENSORI

LA  
A-  
A-  
BACK  
LOGIN

**GENOVA**  
LATITUDINE 44° 24' 36.46"  
LONGITUDINE 08° 55' 31.88"

► DATI RILEVATI

La stazione è situata presso l'acquario.  
La stazione mareografica è dotata di caposaldi altimetrici. Ogni caposaldo è riferito al livello medio del mare misurato a Genova dall'antico mareografo Thompson. I caposaldi sono contrassegni metallici che determinano la quota altimetrica mediante livellazione di alta precisione condotta a partire dalle linee principali stabilite dall'IGM.

**PARAMETRI MISURATI**

LIVELLO IDROMETRICO ogni 10" (mareografo ad ultrasuoni)
LIVELLO IDROMETRICO in continuo (asta idrometrica)
LIVELLO IDROMETRICO in continuo (idrometrografo verticale)
TEMPERATURA ACQUA ogni 60"
TEMPERATURA ARIA ogni 60"
PRESSIONE ATMOSFERICA ogni 60"
DIREZIONE VENTO ogni 60"
VELOCITÀ VENTO ogni 60"

ANCONA  
BARI  
CAGLIARI  
CARLOFORTE  
CATANIA  
CIVITAVECCHIA  
CROTONE  
IMPERIA  
LA SPEZIA  
LAMPEDUSA  
LIVORNO  
MESSINA  
NAPOLI  
ORTONA

FOTO ■  
MAPPA □

Fig. 17 – La pagina del mareografo di Genova nel sito web dell'ISPRa, ente che gestisce la rete mareografica italiana

Dal caposaldo fondamentale ha origine la **rete di livellazione**, misurata con la tecnica della livellazione geometrica di alta precisione (v. seconda parte del corso) che copre in genere tutto il territorio di una nazione e *realizza* il datum verticale permettendo di istituire sul territorio punti di quota ortometrica nota (caposaldi) collegati al mareografo fondamentale.

In Italia esistono tre definizioni del datum altimetrico:

- per la parte continentale, mareografo di Genova, livello medio del mare del 1942;
- per la Sicilia, mareografo di Catania, livello medio del mare del 1965;
- per la Sardegna, mareografo di Cagliari, livello medio del mare del 1956.

Tra l'una e l'altra definizione ci sono differenze di alcuni centimetri, dovute alla diversa località, al diverso periodo e agli errori nelle reti che realizzano il datum. Queste differenze tuttavia non hanno rilevanza per la maggior parte delle applicazioni pratiche in cui si opera localmente e più che le quote interessano i *dislivelli* cioè le differenze di quota. Ovviamente opere di ingegneria come il ponte sullo Stretto necessitano di una datum locale appositamente definito.

Nella geodesia moderna, che per le misure utilizza tecniche satellitari, al datum altimetrico deve sempre essere associato un **modello di geoide**. Per l'Italia, il modello ITALGEO2005 è adattato alla rete di livellazione nazionale in modo da minimizzare gli scostamenti tra la superficie del modello e quella della superficie di quota zero a cui è riferita la livellazione. Migliori risultati si possono ottenere con modelli adattati localmente alla rete di livellazione, come il geoide Umbria 2008. Scostamenti di una certa misura sono comunque inevitabili, sia per effetto degli errori di misura che si accumulano nella rete di livellazione, sia per effetto dell'approssimazione del modello e degli interpolatori utilizzati per esso, sia infine per le deformazioni altimetriche della crosta terrestre dovute a fenomeni sismici, di subsidenza (ad es. in seguito all'estrazione di metano o acqua dal sottosuolo) e di bradisismo (ad es. in zone vulcaniche).



Fig. 18 – Rete di livellazione italiana

La figura 18 mostra uno schema della rete di livellazione italiana, realizzata e periodicamente aggiornata – un tratto alla volta – dall’IGM. Date le modalità di misura, le linee di livellazione seguono per lo più percorsi di strade statali, con un *caposaldo* materializzato ogni chilometro circa. La figura 19 riporta a titolo di esempio la *monografia* di uno di questi caposaldi.


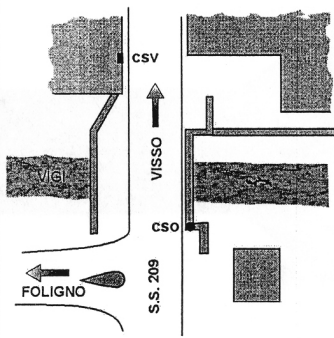
	Provincia: PERUGIA Comune: CERRETO DI SPOLETO Carabinieri: CERRETO DI SPOLETO	Proprietà: _____ Indirizzo: _____ Comune: _____ Cap: _____ Tel: _____ Fax: _____ Provincia: _____	
	Cartografia 1:25 000 Serie 25IV: 131 II NE Serie 25:		
C: 357,0463 (CSO) Bulloncino inox universale infisso sulla spalla destra del ponte, lato valle, sul fiume Vigi.	Progressiva chilometrica: Km 46,208 dal Nodale N041P ### #### Quotato: 1998 Ricognito: 1998		
C: 358,2603 (CSV) Piastrina infissa sul fronte, a destra del portone di accesso, della casa posta a monte del ponte e lungo la riva sinistra del fiume Vigi			Geografiche (Roma40) φ: 42°48'44,755" λ: 00°27'44,794" Geografiche (WGS84) φ: λ: Plane (Gauss-Boaga) Fisso N: Fisso E: 4.742.180,00 E: 2.349.510,00 Plane (UTM-WGS84) Fisso 29 N: Fisso 33 N: E: E:
ANNOTAZIONI ○ SGQ998 ■ SGQ928 358,5440 (vecchia rete)   RIQ998			
BORGO CERRETO (Ponte sul fiume Vigi)		0122# ### 046#	

Fig. 19 – Esempio di monografia di un caposaldo di livellazione IGM. Sono indicate anche le coordinate geografiche ma il dato più importante è la quota ortometrica, che è indicata con ben quattro cifre decimali. L’accuratezza relativa (riferita alla distanza) del dislivello tra due caposaldi successivi è infatti dell’ordine di 1 mm/km o poco inferiore. La materializzazione in questo caso è doppia, realizzata con un caposaldo “orizzontale” posto sulla spalla di un ponte e un caposaldo “verticale” costituito da una piastrina murata sulla facciata di un edificio.

## 2. COORDINATE NELLA GEODESIA

Una volta che sia stato definito il datum geodetico in cui si opera, la posizione di un punto può essere individuata, pur restando nello stesso datum, mediante diversi tipi di **coordinate**, tra loro praticamente equivalenti perché è possibile passare dall'uno all'altro con opportune formule di trasformazione, espressione di algoritmi matematici.

Di seguito, si elencano i principali tipi di coordinate utilizzati nella geodesia operativa, con le rispettive caratteristiche ed i relativi campi di applicazione. Alcuni di essi sono tridimensionali, mentre altri forniscono solo informazioni planimetriche.

### 2.1. Coordinate geografiche ellissoidiche

Le **coordinate geografiche ellissoidiche**  $\varphi$  (*latitudine*) e  $\omega$  (*longitudine*) sono state già definite trattando la geometria dell'ellissoide. La coppia di valori  $(\varphi, \omega)$  definisce la sola posizione planimetrica di un punto, ovvero la posizione della **proiezione** del punto sull'ellissoide ( $P_0$  nella figura 20).

Nel modo di operare classico della geodesia, l'altimetria viene trattata a parte, con la quota ortometrica ottenuta da misure di livellazione. Nella geodesia satellitare, data la natura tridimensionale dei rilievi GNSS, alla coppia  $(\varphi, \omega)$  viene generalmente associata l'*altezza ellissoidica*  $h$ . La terna  $(\varphi, \omega, h)$  definisce la posizione tridimensionale o planoaltimetrica di un punto. Nella fig. 20 sono ben visibili le coordinate  $\varphi_P, \omega_P, h_P$  del punto P, non appartenente all'ellissoide.

Tra tutti i tipi di coordinate, le geografiche sono quelle di impiego più generale: vengono utilizzate per fornire i risultati della compensazione delle reti (sia trigonometriche classiche che GNSS), per individuare i vertici nelle monografie e nei cataloghi, e per il posizionamento e la georeferenziazione in generale.

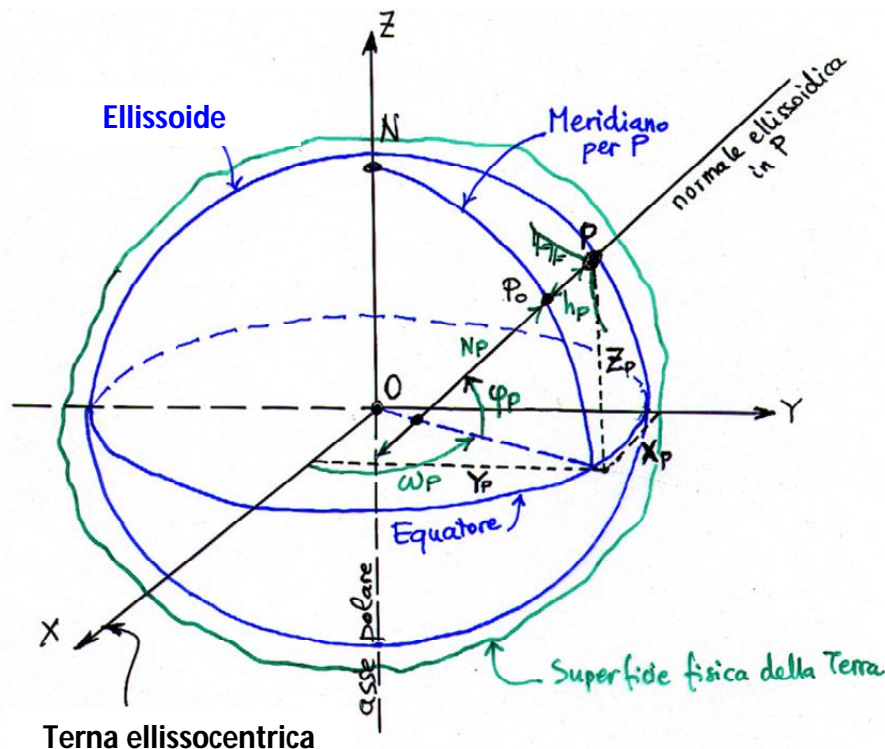


Fig. 20 – Coordinate geografiche e coordinate cartesiane ellissocentriche.



Le coordinate geografiche si esprimono quasi sempre nella notazione sessagesimale. Il numero di cifre decimali da indicare nei secondi dipende dall'approssimazione della posizione che si vuole esprimere. Ricordiamo che in Italia centrale 1" di latitudine corrisponde a circa 30 metri, e 1" di longitudine a circa 20 metri. La prima cifra decimale dei secondi corrisponde allora rispettivamente a 3 e 2 metri, la seconda cifra a 30 e 20 cm, la terza cifra a 3 e 2 cm, la quarta cifra a 3 e 2 mm. La longitudine viene indicata spesso (ad es. nelle monografie IGM) con la lettera greca  $\lambda$ <sup>9</sup>.

Nello scrivere una posizione in geografiche, va sempre specificato se la latitudine è Nord o Sud, e se la longitudine è Est o Ovest, indicando il meridiano fondamentale. Ovviamente, va sempre precisato anche il datum nel quale le coordinate sono espresse:

Esempio di georeferenziazione planoaltimetrica di un punto (vertice Montegrillo della rete statica umbra) in coordinate geografiche, con approssimazione subcentimetrica:

$\varphi = 43^{\circ} 07' 32,6527''$  N  
 $\omega = 12^{\circ} 22' 10,5687''$  E Greenwich Datum ETRF89 (WGS84)  
 $h = 468,247$  m (ellissoidica)

## 2.2. Coordinate cartesiane geocentriche o ellissocentriche

Le **coordinate cartesiane geocentriche** ( $X, Y, Z$ ) sono le coordinate cartesiane di un punto rispetto alla terna d'assi geocentrica  $OXYZ$  (fig. 20). La terna di valori ( $X, Y, Z$ ) definisce la posizione tridimensionale di un punto in modo del tutto equivalente alla terna ( $\varphi, \omega, h$ ) delle coordinate geografiche integrate dall'altezza ellissoidica. Vedremo infatti tra poco come sia agevole passare dalle une alle altre coordinate.

Va fatta una distinzione un po' sottile tra coordinate *geocentriche* ed *ellissocentriche*. In generale, le coordinate ( $X, Y, Z$ ) sono sempre "ellissocentriche" in quanto la terna d'assi ha origine nel centro di un ellissoide. Se si tratta di un ellissoide geocentrico (come ad es. il WGS84), si dicono coordinate cartesiane "geocentriche". Se l'ellissoide non è geocentrico (come ad es. nel datum Roma40) è più corretto usare il termine "ellissocentriche".

Le coordinate geocentriche o ellissocentriche si esprimono in metri e individuano la posizione tridimensionale di un punto senza ambiguità. I segni delle tre coordinate fanno sì che non vi sia possibilità di errore, non esistono due punti con la stessa terna di coordinate geocentriche. Al solito, va sempre specificato il datum:

Esempio di georeferenziazione tridimensionale di un punto (vertice Montegrillo della rete statica umbra) in coordinate cartesiane geocentriche, con approssimazione millimetrica:

$X = 4554516,355$  m  
 $Y = 998842,510$  m Datum ETRF89 (WGS84)  
 $Z = 4338027,384$  m

Di solito si preferisce esprimere i **risultati** dei rilevamenti mediante le coordinate geografiche, che hanno un significato fisico più intuitivo di quelle geocentriche e trovano riscontro nella cartografia, quasi sempre dotata di un reticolato in coordinate geografiche.

Le coordinate geocentriche si prestano invece molto bene per eseguire i **calcoli** relativi alle misure GNSS (determinazione di baselines, compensazione di reti di baselines, ...) e per effettuare trasformazioni di datum mediante la trasformazione di Helmert (v. seguito).

<sup>9</sup> Nel nostro materiale didattico utilizziamo di norma la seguente convenzione: la longitudine è indicata con  $\omega$  quando è riferita al meridiano fondamentale, e con  $\lambda$  quando è riferita al meridiano centrale del fuso cartografico (v. cartografia).

### 2.3. Coordinate cartesiane locali

Le **coordinate cartesiane locali** o **euleriane** ( $e, n, h$ ) sono le coordinate di un punto rispetto alla cosiddetta "terna euleriana"  $P_0neh$  avente origine in un punto  $P_0$  della superficie ellissoidica, asse  $h$  diretto secondo la normale all'ellissoide in  $P_0$ , assi  $e$  ed  $n$  nel piano tangente, rispettivamente tangenti al meridiano e al parallelo per  $P_0$  (fig. 21).

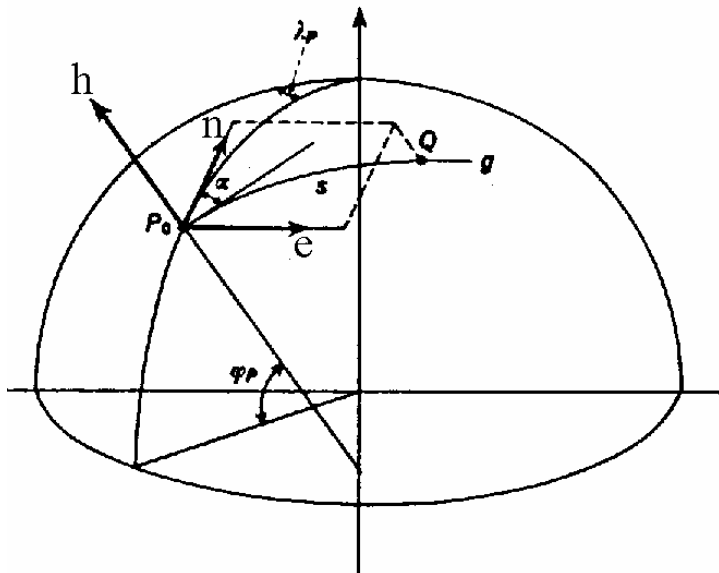


Fig. 21 – Terna euleriana e coordinate cartesiane locali

Questo tipo di coordinate viene talvolta utilizzato nei rilievi GPS per esprimere posizioni tridimensionali o altre grandezze vettoriali (baselines, residui, spostamenti, ecc.) in un sistema che, pur essendo cartesiano, è **locale** e aderente al terreno, e permette di scindere (anche se non rigorosamente) la componente altimetrica da quelle planimetriche. Le coordinate cartesiane locali, in un intorno dell'origine, corrispondono praticamente alle coordinate che si potrebbero misurare sul piano tangente all'ellissoide, e quindi possono risultare utili per tracciamenti di opere in cantieri di limitata ampiezza e analoghi problemi ingegneristici. Ovviamente, un riferimento euleriano può essere utilizzato solo in un limitato intorno dell'origine  $P_0$ .

### 2.4. Coordinate geodetiche locali

La posizione planimetrica di un punto  $P$  può essere espressa (v. fig. 22) mediante le **coordinate geodetiche polari** ( $s, \alpha$ ) rispetto ad un punto  $O$  dell'ellissoide assunto come origine (detto *polo*), del quale siano note le coordinate geografiche ( $\varphi_0, \omega_0$ ).

La coordinata  $s$  (**distanza polare**) rappresenta la distanza del punto  $P$  dal polo, misurata lungo l'arco di geodetica  $OP$ , mentre  $\alpha$  (detto **azimut geodetico** o semplicemente **azimut**) è l'angolo formato dalla tangente in  $O$  alla geodetica  $OP$  con il meridiano passante per  $O$ ; l'azimut viene contato in senso orario a partire dalla direzione Nord.

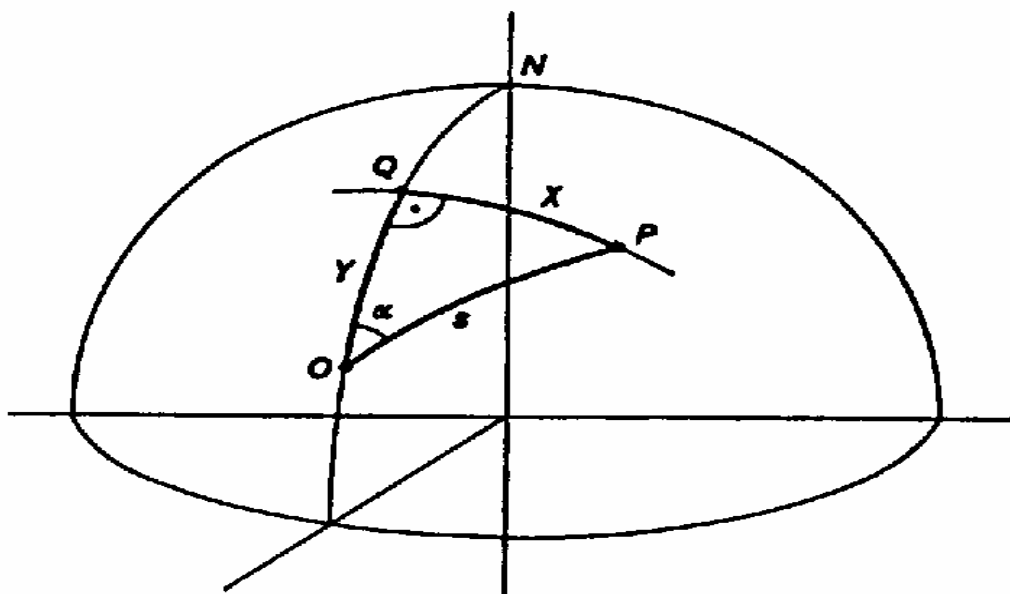


Fig. 22 – Coordinate geodetiche polari e ortogonali

In modo del tutto equivalente, la posizione planimetrica di un punto può essere espressa (v. ancora la fig. 22) mediante le **coordinate geodetiche ortogonali** o **rettangolari** ( $X, Y$ ) rispetto ad un punto  $O$  noto, assunto come origine.<sup>10</sup>

La coordinata  $X$  rappresenta la **lunghezza dell'arco di meridiano** compreso tra  $O$  e  $Q$ , dove  $Q$  è il piede della geodetica perpendicolare al meridiano condotta da  $P$  (<sup>11</sup>). La coordinata  $Y$  è la **lunghezza dell'arco di geodetica**  $Q - P$ .

Questi due tipi di coordinate, tra loro equivalenti (la trasformazione diretta e inversa è particolarmente semplice), hanno validità locale, sono adatti cioè a definire posizioni nell'intorno dell'origine  $O$ , e vengono utilizzati prevalentemente nella geodesia classica.

Le coordinate geodetiche ortogonali coincidono con le coordinate piane cartografiche CASSINI-SOLDNER utilizzate dal Catasto in molte province (v. cartografia).

## 2.5. Coordinate piane cartografiche

La posizione planimetrica di un punto può essere espressa anche mediante le sue coordinate **piane** in una assegnata rappresentazione cartografica (v. seconda parte del corso).

Dato che la rappresentazione cartografica stabilisce una corrispondenza biunivoca tra ellissoide e piano della carta, **le coordinate piane cartografiche sono del tutto equivalenti alle coordinate geografiche** ( $\varphi, \omega$ ), alle quali possono essere ricondotte con le equazioni della carta e le inverse.

In Italia, tra le coordinate piane, vengono utilizzate particolarmente le *UTM-ETRF89* ( $N, E$ ), le *Gauss-Boaga* ( $N, E$ ), le *UTM-ED50* ( $N, E$ ) e le coordinate catastali *Cassini-Soldner* ( $X, Y$ ). Per la loro praticità d'uso, dovuta al fatto che si misurano in metri, le coordinate cartografiche sono di fatto le coordinate più utilizzate, anche più delle geografiche, per definire le posizioni planimetriche ottenute da rilevamenti, sia di tipo GNSS o tradizionale sia fotogrammetrici.

<sup>10</sup> Si faccia attenzione a non confondere queste coordinate  $X, Y$  con le coordinate cartesiane geocentriche che hanno la stessa notazione ma hanno un significato completamente diverso.

<sup>11</sup> Tra le infinite geodetiche passanti per  $P$ , ve ne è una e una sola che interseca perpendicolarmente il meridiano per  $O$ .

### 3. TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

#### 3.1. Premessa

Prima di passare all'esame dei procedimenti geodetici di trasformazione più ricorrenti, è opportuno sottolineare la differenza fra **trasformazioni di coordinate** (nell'ambito di uno stesso datum geodetico) e **trasformazioni di datum** (passaggio da un datum geodetico ad un altro). Si tratta di due operazioni concettualmente ben distinte:

- Le **trasformazioni di coordinate** sono generalmente risolubili in forma analitica chiusa, o comunque con algoritmi geometrico-matematici ben definibili teoricamente, che nella maggior parte dei casi non comportano alcuna perdita di precisione dei dati originari se non per gli arrotondamenti di calcolo.
- Le **trasformazioni di datum**, essendo i datum "realizzati" da reti geodetiche e misure affette da errori, si basano necessariamente sull'utilizzo di parametri determinati statisticamente in base alla conoscenza delle coordinate in entrambi i datum per un certo numero di punti. Di conseguenza, questo secondo tipo di passaggi comporta quasi sempre indeterminazioni di uno o più ordini di grandezza superiori a quelle derivanti da una trasformazione di coordinate.

Iniziamo a trattare i problemi di **trasformazione di coordinate**, affrontando i casi più significativi e ricorrenti nella pratica.

#### 3.2. Da coordinate geografiche ellissoidiche a coordinate cartesiane geocentriche (e viceversa)

E' una trasformazione tipica delle applicazioni GNSS. E' tridimensionale, cioè interessa contemporaneamente planimetria e altimetria.

- *Trasformazione diretta (da geografiche a geocentriche)*

Le equazioni parametriche dell'ellissoide:

$$\begin{cases} X = N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega \\ Y = N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega \\ Z = N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

forniscono le coordinate cartesiane di un punto  $P_0$  appartenente alla superficie ellissoidica, in funzione delle sue coordinate geografiche  $(\varphi, \omega)$ .

Per un generico punto  $P$  situato ad un'altezza  $h$  rispetto alla superficie ellissoidica (fig. 20), calcolando le proiezioni dell'altezza ellissoidica  $h$  sui tre assi  $X, Y, Z$ , che valgono rispettivamente:

$$\begin{cases} h_x = h \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega \\ h_y = h \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega \\ h_z = h \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

ed aggiungendole ai primi membri delle (1) le equazioni si modificano come segue:

$$\begin{cases} X = (N + h) \cos \varphi \cdot \cos \omega \\ Y = (N + h) \cos \varphi \cdot \sin \omega \\ Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

Queste espressioni permettono di eseguire in modo immediato la trasformazione da coordinate geografiche (e altezza ellissoidica) a coordinate cartesiane geocentriche.

- *Trasformazione inversa (da geocentriche a geografiche)*

La longitudine si ottiene immediatamente da:

$$\omega = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) + k \cdot \pi \quad , \quad \text{con } k = 0, 1, 2 \quad (3)$$

Per stabilire il valore di  $k$ , tenendo conto che la funzione tangente è periodica di  $\pi$ , va fatta una discussione dei segni del numeratore e del denominatore, come segue:

$$\begin{array}{cccc} \frac{+}{+} \rightarrow k = 0 & \frac{+}{-} \rightarrow k = 1 & \frac{-}{-} \rightarrow k = 1 & \frac{-}{+} \rightarrow k = 2 \end{array}$$

La latitudine e l'altezza non sono ottenibili in modo immediato. La letteratura riporta numerosi metodi di inversione delle (2), tra i quali è molto usata la seguente procedura iterativa:

Dalle prime due equazioni della trasformazione diretta, quadrando e sommando, si ottiene:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = (N + h)\cos\varphi = p \quad p \text{ rappresenta la distanza del punto dall'asse } Z$$

da cui si ricava:

$$h = \frac{p}{\cos\varphi} - N \quad (*)$$

La terza delle (2) si può riscrivere come segue:

$$Z = (N + h - e^2 N)\sin\varphi = (N + h) \cdot \left(1 - e^2 \frac{N}{N + h}\right) \cdot \sin\varphi$$

dividiamo quest'ultima espressione membro a membro per  $p$ :

$$\frac{Z}{p} = \frac{(N + h) \cdot 1 - \left(e^2 \frac{N}{N + h}\right) \cdot \sin\varphi}{(N + h)\cos\varphi} = \left(1 - e^2 \frac{N}{N + h}\right) \cdot \tan\varphi \quad \text{da cui si ricava:}$$

$$\tan\varphi = \frac{Z}{p} \cdot \left(1 - e^2 \frac{N}{N + h}\right)^{-1} \quad (**)$$

La (\*) e la (\*\*) permettono di effettuare il seguente procedimento iterativo:

dalla (\*\*), ponendo  $h=0$ , si calcola una latitudine di prima approssimazione; questa si sostituisce nella (\*) dalla quale si ottiene una  $h$  di prima approssimazione; questa si sostituisce nella (\*\*) da cui si ottiene una latitudine di seconda approssimazione ... e così via, fino a che le differenze tra i valori trovati in una iterazione e in quella successiva non sono inferiori a una soglia prefissata (la precisione da raggiungere).

In alternativa al metodo iterativo, si può utilizzare la seguente formula dovuta a BOWRING, che fornisce direttamente un valore della latitudine approssimato:

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2 b \cdot \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cdot \cos^3 \theta} \quad (4)$$

dove  $\theta$  è un angolo ausiliario fornito da:

$$\theta = \arctan\left(\frac{Za}{pb}\right) \quad (5)$$

e l'altezza si ricava poi dalla (\*).

Per eseguire con la calcolatrice un esempio numerico delle predette trasformazioni diretta ed inversa, si possono utilizzare i dati riportati a pag. 25 (vertice Montegrillo).

### 3.3. Da coordinate cartesiane geocentriche a coordinate locali euleriane e viceversa

- *Trasformazione diretta (da geocentriche a locali)*

E' una trasformazione che riguarda coordinate tridimensionali, quindi interessa contemporaneamente planimetria ed altimetria.

Sia  $P_0$ , di coordinate geocentriche note  $(X_0, Y_0, Z_0)$ , l'origine della terna euleriana (v. fig. 21). Sia  $P$  un punto generico, di coordinate geocentriche  $(X, Y, Z)$ . Si calcolano le differenze di coordinate tra  $P$  e  $P_0$ , cioè le componenti del vettore "baseline"  $P - P_0$ :

$$\Delta X = X - X_0$$

$$\Delta Y = Y - Y_0$$

$$\Delta Z = Z - Z_0$$

Le coordinate  $(e, n, h)$  di  $P$  si ottengono mediante le **formule di rotazione** tra i due sistemi:

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ h \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\varphi, \omega) \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (6)$$

dove  $\mathbf{R}(\varphi, \omega)$  è la *matrice di rotazione* data da:

$$\mathbf{R}(\varphi, \omega) = \begin{bmatrix} -\text{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ -\text{sen}\varphi\cos\omega & -\text{sen}\varphi\text{sen}\omega & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\omega & \cos\varphi\text{sen}\omega & \text{sen}\varphi \end{bmatrix}$$

calcolata per le coordinate geografiche di  $P_0$ , ottenibili dalle geocentriche mediante il procedimento di cui al punto 3.2.

- *Trasformazione inversa (da locali a geocentriche)*

Si ottiene facilmente invertendo le (6):

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1}(\varphi, \omega) \begin{bmatrix} e \\ n \\ h \end{bmatrix} \quad (7)$$

La matrice inversa  $\mathbf{R}^{-1}(\varphi, \omega)$  risulta uguale alla trasposta<sup>12</sup>:

$$\mathbf{R}^{-1}(\varphi, \omega) = \mathbf{R}^T(\varphi, \omega) = \begin{bmatrix} -\text{sen}\omega & -\text{sen}\varphi\cos\omega & \cos\varphi\cos\omega \\ \cos\omega & -\text{sen}\varphi\text{sen}\omega & \cos\varphi\text{sen}\omega \\ 0 & \cos\varphi & \text{sen}\varphi \end{bmatrix}$$

dove le coordinate geografiche sono sempre quelle dell'origine  $P_0$ .

Le coordinate geocentriche di  $P$  si ottengono infine sommando alle coordinate geocentriche di  $P_0$  le componenti della baseline calcolate dalle (7):

<sup>12</sup> E' questa una proprietà delle matrici di rotazione: la inversa coincide con la trasposta

$$\begin{aligned}
 X &= X_0 + \Delta X \\
 Y &= Y_0 + \Delta Y \\
 Z &= Z_0 + \Delta Z
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

### 3.4. Da geodetiche polari a geografiche (e viceversa)

- *Trasformazione diretta (da geodetiche polari a geografiche)*

Questa trasformazione è relativa alla sola planimetria. E' un problema classico, definito un tempo "Primo problema fondamentale della Geodesia", o anche "Trasporto di coordinate geografiche lungo un arco di geodetica".

Per le espressioni necessarie (sviluppi di LEGENDRE-DELAMBRE o formule più complesse per archi di geodetica molto lunghi) si rimanda al libro di testo (Folloni). Questa trasformazione è tipica della Geodesia classica e non è di uso frequente nelle applicazioni del GPS.

Per effettuare la trasformazione, è ovviamente necessario conoscere le coordinate geografiche del polo.

- *Trasformazione inversa (da geografiche a geodetiche polari)*

Anche questo è un problema classico, definito in passato "Secondo problema fondamentale della Geodesia". Si rimanda anche in questo caso al testo (Folloni), dove è descritto un procedimento che utilizza la rappresentazione cartografica conforme di Gauss.

### 3.5. Da geografiche a geodetiche ortogonali (e viceversa)

Il procedimento diretto e inverso per questa trasformazione, che interessa la sola planimetria, verrà descritto nella successiva dispensa di Cartografia, in quanto viene prevalentemente utilizzato per il calcolo delle coordinate catastali piane Cassini-Soldner, che sono numericamente uguali alle coordinate geodetiche rettangolari.

### 3.6. Da geodetiche polari a geodetiche ortogonali (e viceversa)

Anche questa trasformazione, ottenibile semplicemente, rientra fra gli algoritmi più classici della Geodesia. La trasformazione riguarda solo la planimetria.

Per le relative espressioni dirette e inverse, derivanti dalla risoluzione del triangolo ellissoidico rettangolo *OPQ* (fig. 22), assimilato a un triangolo sferico sulla sfera locale e quindi risolubile mediante i teoremi di Cavalieri e di Legendre, si rimanda anche qui al libro di testo (Folloni).

### 3.7. Da geografiche a piane cartografiche (e viceversa)

Il passaggio da coordinate geografiche a cartografiche (in base al tipo di rappresentazione cartografica adottato) si effettua con le formule di corrispondenza dirette ed inverse. La trasformazione è relativa alla sola planimetria. Per le espressioni necessarie, si rimanda alla successiva dispensa relativa alla Cartografia.

### 3.8. Schema di riepilogo delle principali trasformazioni di coordinate

La figura 23 riepiloga e sintetizza le principali trasformazioni di coordinate effettuabili, si ripete ancora una volta, all'interno di un datum geodetico ben definito. Nello schema sono indicati i passaggi più usualmente eseguiti (e sopra descritti), distinguendo fra le trasformazioni 2D (che riguardano la sola planimetria) e quelle 3D (planimetria e quota ellissoidica).

Naturalmente, è possibile effettuare trasformazioni più complesse mediante l'esecuzione in serie di passaggi successivi.

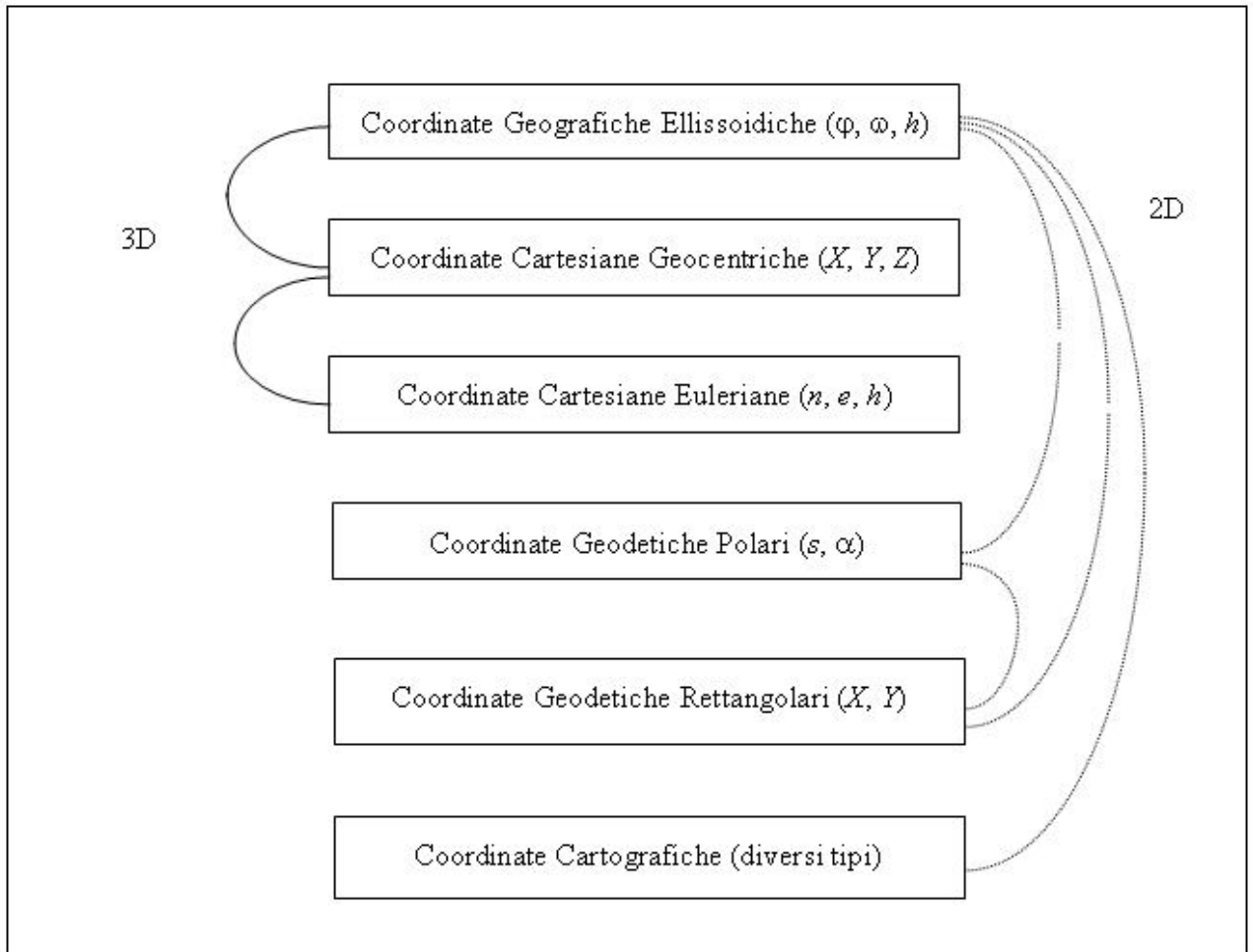


Fig. 23 – Riepilogo delle principali trasformazioni di coordinate eseguibili nell'ambito di **un** datum.



## 4. TRASFORMAZIONI DI DATUM

### 4.1. Premessa

Si tratta in questo caso di passare **da un sistema di riferimento geodetico ad un altro**. Le differenze tra un datum e l'altro, se trascurate, si traducono in errori grossolani di posizione che sono spesso di grande entità.

A titolo di esempio, le coordinate geografiche del vertice trigonometrico "Castiglione del Lago" (appartenente alla rete IGM 95) espresse in diversi datum sono le seguenti:

*Roma 40:*  $\varphi = 43^{\circ} 07' 37,250''$   
 $\omega = -0^{\circ} 23' 47,323''$  E M.Mario =  $12^{\circ} 03' 21,077''$  E Greenwich

*WGS 84:*  $\varphi = 43^{\circ} 07' 39,584''$   
 $\omega = 12^{\circ} 03' 20,248''$  E Greenwich

*Bessel Genova:*  $\varphi = 43^{\circ} 07' 36,766''$   
 $\omega = 12^{\circ} 03' 19,399''$  E Greenwich

La massima differenza in latitudine (tra WGS84 e Bessel) è di quasi 3", che corrispondono a circa 90 metri. L'esempio fa capire come sia **indispensabile** precisare il datum a cui si fa riferimento. La figura 24 chiarisce meglio, grazie alla grafica, questo concetto.

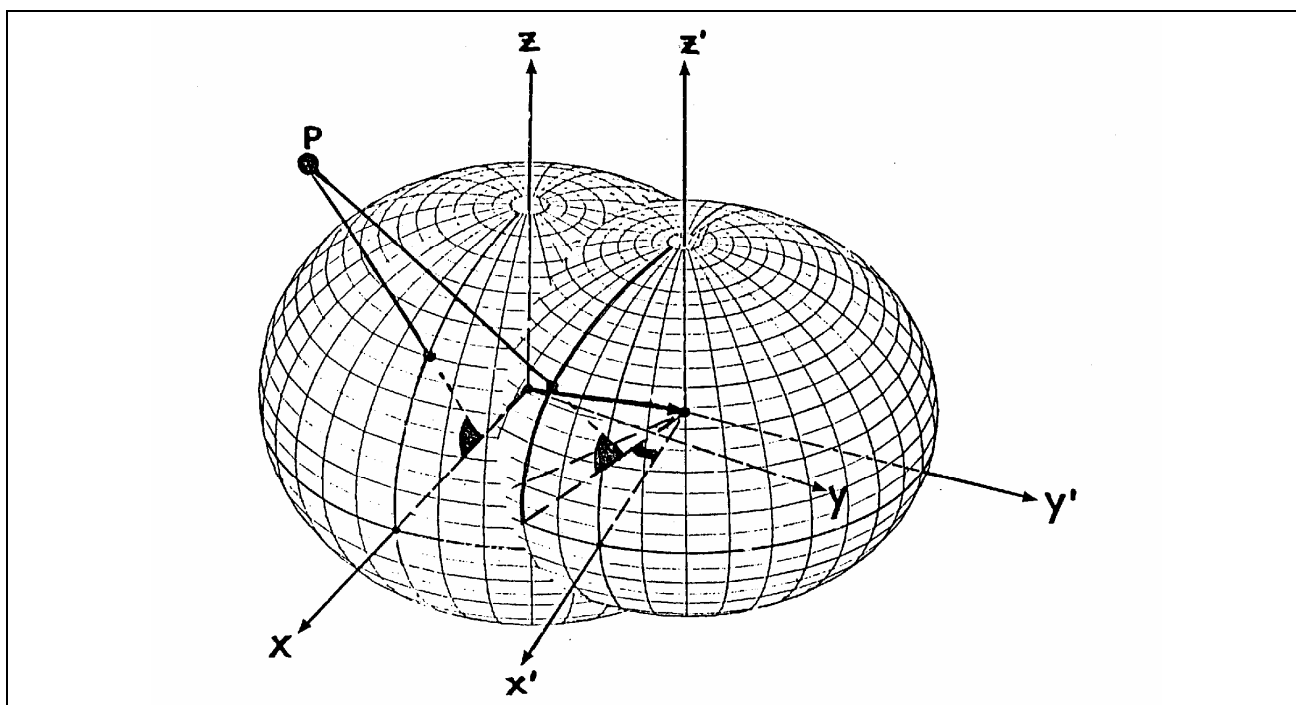


Fig. 24 – Uno stesso punto P riferito a due diversi datum geodetici ha coordinate geografiche diverse [Da Beutler]  
N.B. gli scostamenti nel disegno sono stati accentuati rappresentandoli fuori scala

Le molteplici procedure utilizzate in geodesia per effettuare trasformazioni di datum possono essere raggruppate in due principali categorie:

- procedimenti basati su una rototraslazione fra sistemi cartesiani nello spazio;
- trasformazioni di tipo empirico valide localmente.

## 4.2. Rototraslazione fra sistemi cartesiani nello spazio: la trasformazione di Helmert

Con questo approccio, la trasformazione di datum viene eseguita operando sulle coordinate cartesiane ellissocentriche nei due sistemi. Si tratta in sostanza di passare da un sistema cartesiano nello spazio ad un'altra terna cartesiana, traslata e ruotata rispetto alla prima, tenendo inoltre conto dei diversi parametri dei due ellissoidi nonché delle eventuali variazioni di scala e distorsioni dovute agli errori di misura nella realizzazione dei due datum.

La figura 24 dà un'idea visiva del problema, mostrando i due datum, ciascuno con il proprio ellissoide associato e la propria terna cartesiana ellissocentrica.

Una procedura di trasformazione di datum molto generale e frequentemente utilizzata, conosciuta come **trasformazione di HELMERT**, consiste in una rototraslazione nello spazio, con un fattore di scala.

La forma analitica della trasformazione di Helmert è la seguente:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_0 + (1 + k) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_1 \quad (9)$$

nella quale  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  rappresentano i vettori posizione di uno stesso punto nel datum 1 e nel datum 2, che hanno per componenti le coordinate cartesiane ellissocentriche del punto nei due sistemi:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}_0$  è un vettore che ha per componenti i tre parametri di traslazione  $X_0, Y_0, Z_0$ :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

mentre  $\mathbf{R}$  è la matrice di rotazione, definita in funzione di tre parametri di rotazione  $R_x, R_y, R_z$  (rotazioni attorno a ciascuno dei tre assi), che ha la seguente forma:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos R_z & \sin R_z & 0 \\ -\sin R_z & \cos R_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos R_y & 0 & -\sin R_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R_y & 0 & \cos R_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_x & \sin R_x \\ 0 & -\sin R_x & \cos R_x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos R_y \cos R_z & \cos R_x \sin R_z + \sin R_x \sin R_y \cos R_z & \sin R_x \sin R_z - \cos R_x \sin R_y \cos R_z \\ -\cos R_y \sin R_z & \cos R_x \cos R_z - \sin R_x \sin R_y \sin R_z & \sin R_x \cos R_z + \cos R_x \sin R_y \sin R_z \\ \sin R_y & -\sin R_x \cos R_y & \cos R_x \cos R_y \end{pmatrix}$$

La matrice di rotazione si ottiene dalla sovrapposizione degli effetti delle tre rotazioni successive  $R_z, R_y, R_x$  (in quest'ordine) che deve compiere la terna cartesiana del sistema 1, rispettivamente attorno agli assi  $Z_1, Y_1, X_1$ , per divenire parallela alla terna del sistema 2; le rotazioni sono considerate positive se antiorarie per un osservatore il cui verso piedi-testa coincida con quello dell'asse.

Per la stima dei parametri (v. oltre) è necessario linearizzare la (9); a tale scopo è sufficiente sostituire all'espressione generale della matrice  $\mathbf{R}$  quella linearizzata valida per piccole rotazioni, che mantiene la stessa forma qualunque sia l'ordine in cui avvengono le tre rotazioni<sup>13</sup>:

$$\mathbf{R}_L = \begin{pmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{pmatrix}$$

Le rotazioni tra gli assi di due terne ellissocentriche sono sempre molto piccole; l'espressione linearizzata può quindi essere impiegata anche per *eseguire* la trasformazione di datum (una volta determinati i parametri), introducendo un'approssimazione inferiore a quella dovuta alle altre cause di incertezza. Si ha così il vantaggio di svincolarsi dalla convenzione relativa all'ordine in cui avvengono le rotazioni.

Il **fattore di scala**  $k$  viene inserito nella rotraslazione per tener conto delle diverse deformazioni che inevitabilmente caratterizzano due diversi datum. Infatti, come si è visto, i datum sono concretamente **realizzati** da set di misure, di punti e di calcoli, spesso relativi a periodi storici molto diversi e strumentazioni di caratteristiche differenti.

Se le misure nei due datum fossero assolutamente prive di errori, e la Terra fosse priva di deformazioni, per passare da un datum all'altro basterebbe eseguire una rotraslazione rigida (6 parametri = 3 traslazioni + 3 rotazioni).

Per tener conto in modo semplice delle deformazioni e degli errori di misura, la trasformazione di Helmert utilizza un settimo parametro, riconducendo tutte le deformazioni a un fattore di scala medio stimato tra i due sistemi. In realtà le deformazioni sono più complesse, ma il fattore di scala riesce a modellarle in una certa misura, senza alterare troppo la geometria originaria. Le figure geometriche nel datum di arrivo sono simili a quelle nel datum di partenza, poiché l'unica deformazione è data dal fattore di scala, per il resto si tratta di una rotraslazione rigida. Per questi motivi la trasformazione di Helmert è anche detta "trasformazione a sette parametri" o "trasformazione di similarità" (*similarity transformation*).

#### ***Alcune osservazioni sulla trasformazione di Helmert:***

- Le tre componenti di traslazione  $X_0, Y_0, Z_0$  rappresentano le coordinate cartesiane nel sistema 2 dell'origine del sistema 1.
- Le convenzioni di segno meritano particolare attenzione, dato che non tutti i software di trasformazione adottano le stesse; quelle sopra riportate sono le più diffuse, accreditate dai più importanti testi sul GPS e utilizzate per i parametri IGM 95.
- La trasformazione di Helmert opera sulle coordinate geocentriche (o ellissocentriche). Se le posizioni nei due datum si vogliono esprimere in coordinate geografiche (come spesso accade) è necessario effettuare tre passaggi successivi:
  - una trasformazione di coordinate da geografiche a geocentriche, nel datum 1;
  - la trasformazione di datum (Helmert) in geocentriche da datum 1 a datum 2;
  - una trasformazione di coordinate da geocentriche a geografiche, nel datum 2.



<sup>13</sup> Se le rotazioni sono piccole, nella espressione di  $\mathbf{R}$  si può sostituire  $\sin R_i = R_i$  e  $\cos R_i = 1$  e si ottiene così la  $\mathbf{R}_L$

In alcuni casi si possono utilizzare alcune trasformazioni affini tridimensionali più semplici, ottenibili come casi particolari della (9):

- Trasformazione a **sei parametri**, cioè rototraslazione rigida, senza fattore di scala ( $k = 0$ ); non introduce alcuna deformazione in un rilievo che venga inserito in un datum preesistente, ma solo una variazione di orientamento. Questa tecnica può essere adottata quando gli errori di misura nei due datum sono piccoli e dello stesso ordine di grandezza, ad esempio quando si confronta un rilievo GPS con un precedente rilievo GPS effettuato sugli stessi punti (è il caso delle reti per monitoraggio di deformazioni).
- Trasformazione a **tre** o a **quattro parametri**, cioè traslazione semplice o con fattore di scala. E' approssimata ma semplice da eseguire. Viene utilizzata per georeferenziazioni rapide di materiale cartografico e GIS a piccola scala (ad es. carte stradali come quelle dei navigatori satellitari, cartografia tematica, rilevamenti geologici su zone ampie, sentieristica, ...).

### **Stima dei parametri:**

Restando nell'ambito della trasformazione di Helmert, che è di gran lunga la più diffusa, **i sette parametri vengono stimati ai minimi quadrati sulla base della conoscenza delle coordinate in entrambi i sistemi per un congruo numero di punti, che vengono detti "punti doppi"**.

Ogni punto doppio tridimensionale (cioè planimetrico e altimetrico) essendo noto in entrambi i sistemi permette di scrivere, mediante le (9), tre equazioni (una per coordinata) nelle quali sono incogniti i sette parametri. Per risolvere il problema serve un numero di equazioni maggiore o uguale a quello delle incognite: è quindi necessario disporre di almeno tre punti doppi tridimensionali ( $3 \times 3 = 9$  equazioni,  $9 > 7$ ). La stima dei parametri viene effettuata con un classico procedimento a minimi quadrati (metodo delle osservazioni indirette, Gauss-Markov). In pratica si utilizza un numero di punti doppi superiore a tre, per controllare l'affidabilità della trasformazione attraverso i residui della stima ai minimi quadrati sulle coordinate dei punti noti.

I punti doppi vanno scelti in modo da essere uniformemente distribuiti nell'area su cui la trasformazione deve essere effettuata, comprese le zone marginali dell'area. Un ulteriore criterio è quello che il poligono dei punti doppi più esterni circoscriva l'area di interesse o comunque sia vicino al perimetro di questa (fig. 26). E' ancora meglio, se possibile, che un certo numero di punti comuni sia esterno al perimetro dell'area, in modo che la trasformazione derivi da una interpolazione piuttosto che da una estrapolazione.

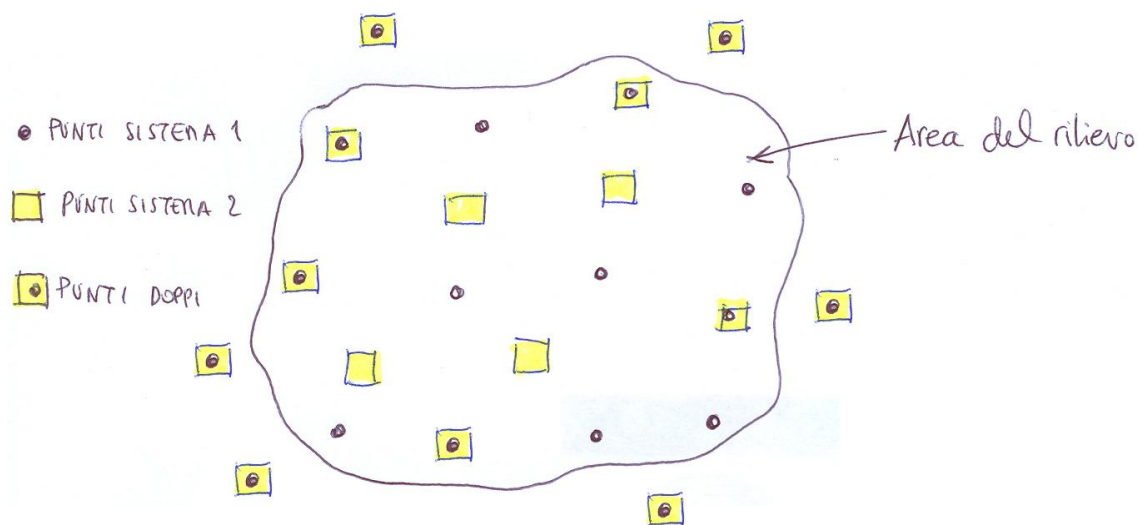


Fig. 26 – Punti doppi e loro distribuzione

Se le realizzazioni (misure e calcolo delle reti) dei due sistemi geodetici fossero prive di errori, l'algoritmo di Helmert produrrebbe una trasformazione praticamente "perfetta", con residui nulli, e il fattore di scala risulterebbe pari a zero (rototraslazione rigida).

Nella realtà, come si è già detto, tutte le reti geodetiche che realizzano i datum (in particolare quelle di vecchia data) sono caratterizzate da deformazioni di vario tipo dovute ad errori di misura e di calcolo, per cui il fattore di scala risulta diverso da zero, la stima dei parametri comporta necessariamente dei residui e la trasformazione risulta sempre approssimata. Si può pertanto affermare che **una trasformazione di datum risulta sempre approssimata**, in maggiore o minor misura a seconda dell'accuratezza delle reti associate ai due datum.

### **Formule di Molodenskij:**

Una variante della trasformazione di Helmert consiste nell'utilizzare le **formule di MOLODENSKIJ**. Queste formule si basano sempre su una rototraslazione a sette parametri (in forma linearizzata), ma sono scritte in coordinate geografiche, e realizzano quindi il passaggio in modo più immediato, senza necessità di effettuare i tre passaggi descritti poco fa.

In pratica, si tratta semplicemente di un modo diverso di scrivere la trasformazione di Helmert, esprimendola in coordinate geografiche:

$$\left\{ \begin{aligned}
 d\varphi &= \frac{\sin \omega}{(N+h)\cos \varphi} dx_0 - \frac{\cos \omega}{(N+h)\cos \varphi} dy_0 - \frac{(1-\alpha)^2 N+h}{N+h} \operatorname{tg} \varphi (\cos \omega dRx + \sin \omega dRy) + dRz \\
 d\omega &= \frac{\sin \varphi \cos \omega}{\rho+h} dx_0 + \frac{\sin \varphi \sin \omega}{\rho+h} dy_0 - \frac{\cos \varphi}{\rho+h} + \frac{\alpha^2}{N+h} (\sin \omega dRx - \cos \omega dRy) + \\
 &+ \frac{[1-(1-\alpha)^2]N}{\rho+h} \cos \varphi \sin \varphi dk + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho+h} \left\{ [1-(1-\alpha)^2]N \frac{da}{a} + [\rho+(1-\alpha)^2 N] \frac{d\alpha}{1-\alpha} \right\} \\
 dh &= \cos \varphi \cos \omega dx_0 - \cos \varphi \sin \omega dy_0 - \sin \varphi dz_0 + [1-(1-\alpha)^2]N \sin \varphi \cos \varphi (\sin \omega dRx - \cos \omega dRy) + \\
 &- \left( \frac{a^2}{N+h} \right) dk - \frac{a}{N} - da + (1-\alpha)^2 N \sin^2 \varphi \frac{d\alpha}{1-\alpha}
 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

In tali espressioni  $dx_0, dy_0, dz_0, dRx, dRy, dRz, dk$  sono i sette parametri di trasformazione (la  $d$  indica che si tratta di valori elementari, in quanto le formule di Molodenskij derivano da una linearizzazione del modello),  $d\alpha$  e  $da$  sono le differenze rispettivamente tra gli schiacciamenti ed i semiassi dei due ellissoidi e  $d\varphi, d\omega, dh$  sono gli incrementi che vanno sommati algebricamente alle coordinate  $(\varphi, \omega, h)$  di un punto nel primo sistema per riferirlo al secondo.

Come accennato, il fatto che le quantità  $d\varphi, d\omega, dh$  compaiano ciascuna in una singola equazione consente di utilizzare i dati planimetrici separatamente da quelli altimetrici, il che è utile, ad esempio, quando per alcuni dei punti doppi non è disponibile, o non è sufficientemente attendibile il valore della quota ellissoidica; in tal caso essi potranno ugualmente concorrere alla stima dei parametri con le due sole equazioni ricavate dalla prime due formule di Molodenskij. Analogamente, un punto che sia noto solo in quota potrà contribuire con una sola equazione data

dalla terza formula. Il maggior vantaggio delle espressioni di Molodenskij sta quindi nel poter utilizzare, ai fini della stima dei sette parametri, anche punti noti solo in planimetria (ad es. vertici di rete catastale) o solo in quota (ad es. caposaldi di livellazione).

#### 4.3. Applicazione della trasformazione di Helmert al passaggio WGS84 ↔ Roma40

Si tratta di un problema che occorre risolvere quando si voglia inserire un rilievo GNSS (georeferenziato nel datum ETRF89-WGS84) in una cartografia preesistente georeferenziata nel vecchio datum nazionale Roma 40, come accade per buona parte della cartografia IGM e regionale (solo quella di produzione più recente è georeferenziata in WGS84).

Per la esecuzione di questa trasformazione di datum, di grande importanza pratica in Italia da quando le tecniche GPS-GNSS si sono diffuse, si è passati attraverso tre fasi successive, che è interessante ripercorrere brevemente, soffermandosi infine con maggior dettaglio sulla procedura mediante grigliati che è quella attualmente adottata:

- a) Nei primi anni di utilizzo del GPS nei rilievi (ca. 1985-1995), si è proceduto stimando **localmente** i parametri della trasformazione per l'area del rilievo sulla base delle coordinate di punti "doppi", con il metodo generale descritto al paragrafo precedente. In pratica, era necessario per ogni rilievo occupare con il GPS un certo numero di vertici della rete classica situati nella zona, noti nel datum Roma 40, determinandone così le coordinate WGS84. La scelta di tali punti era però del tutto arbitraria, e operatori diversi pervenivano a risultati diversi (anche se non di tanto) pur lavorando in una stessa zona.
- b) Quando l'IGM pubblicò (seconda metà anni 1990) i risultati della rete IGM95, procedette al calcolo per tutta l'Italia dei valori dei 7 parametri della trasformazione di Helmert da WGS84 a Roma 40. Per ogni vertice della nuova rete venne stimato un set di parametri valido **nell'intorno di tale vertice**, sulla base delle coordinate note dei punti circostanti, e tali parametri vennero inseriti nella monografia del vertice stesso (v. fig. 9). In questo modo la trasformazione di datum non era più affidata a scelte dell'operatore ma si basava su parametri noti a priori. Restava però un problema: i parametri variavano da punto a punto, essendo stimati localmente. Per evitare possibili ambiguità, si adottava il criterio di utilizzare i parametri del **vertice IGM95 più vicino** all'area del rilievo. Se però l'area era vasta, si dovevano adottare i parametri di più vertici IGM95; ci si affidava al criterio della minima distanza, ma potevano nascere delle ambiguità.
- c) Per semplificare la trasformazione evitando ambiguità, l'IGM ha proceduto successivamente al calcolo e alla pubblicazione di "**grigliati**" di trasformazione che riportano le **variazioni di latitudine e longitudine** tra WGS84 e Roma 40 in funzione delle coordinate geografiche del punto considerato. Le variazioni sono calcolate per incrementi finiti di latitudine e longitudine, in sostanza quindi ne vengono dati i valori sui nodi di un **grigliato** a maglia quadrangolare. Per calcolare le variazioni da attribuire a un generico punto rilevato, tale grigliato bidimensionale deve essere **interpolato**, e per farlo in maniera univoca l'IGM fornisce un software di interpolazione, il software VERTO. I grigliati IGM comprendono anche le ondulazioni del geode, calcolate nei nodi della stessa griglia, per poter passare da altezza ellissoidica a quota ortometrica e viceversa.

I files dei grigliati sono files di testo (ascii), che vengono ceduti dall'IGM a pagamento. Sono disponibili files con validità nell'intorno di un singolo vertice IGM95, oppure (più pratici per l'utilizzo) validi in un intero foglio della carta IGM in scala 1:50.000. Ad es., Perugia ricade nel foglio 311 della carta 1:50.000 IGM; per effettuare trasformazioni in questa zona è necessario disporre del file di grigliato **311.grX**. Per zone più vaste, il software seleziona punto per punto il file di grigliato appropriato.

Esistono attualmente tre formati di grigliati IGM, riconoscibili dalla diversa estensione. La tabella 2 ne riassume le caratteristiche, precisando a quale tipo di parametri e a quale geoide si riferiscono rispettivamente per la planimetria e per l'altimetria:

Tabella 2 – Tipi e caratteristiche dei files dei grigliati IGM

<b>Tipo (estensione file)</b>	<b>Planimetria</b>	<b>Altimetria</b>
<b>.gr1</b>	ETRF89 ↔ Roma40	ITALGEO99
<b>.gr2</b>	ETRF89 ↔ Roma40	ITALGEO2005
<b>.grk</b>	ETRF2000 ↔ Roma40	ITALGEO2005

Oltre al citato software VERTO, fornito in diverse versioni dall'IGM, esistono anche altri software commerciali o free che utilizzano i grigliati IGM, che come detto sopra sono semplici files in formato ascii e possono quindi essere letti facilmente da un software.

Tra i software di trasformazione disponibili gratuitamente rientra FERENS+, realizzato nel 2008 per la Regione Umbria dal DICA dell'Università di Perugia nell'ambito di una convenzione di ricerca, e scaricabile dal sito <http://www.territorio.regione.umbria.it/news.asp?id=16>. Si tratta di un software molto versatile, in grado di effettuare trasformazioni di coordinate e datum tra ETRF89, Roma40, ED50 e i sistemi catastali delle province di Perugia e Terni, operando su punti singoli, su files di coordinate con formato selezionabile a scelta e su files grafici di cartografia nei formati .dxf, .shp e .cxf (questi ultimi vengono ri-georeferenziati interamente nel datum di destinazione). Il campo di validità di FERENS+ è limitato all'area dell'Umbria. In alternativa ai grigliati .gr1 e .gr2, per l'altimetria FERENS+ può utilizzare il modello di geoide UMBRIA2008; a tale scopo è sufficiente copiare nella cartella dei grigliati l'apposito file del geoide umbro che viene fornito con il file di setup di FERENS+ (Geoide\_Umbria\_01.grd). La prossima versione di FERENS+, in corso di realizzazione, potrà utilizzare anche i nuovi grigliati .grk.

La figura 27 riporta in alto la schermata principale del software VERTO (versione 1) relativa alla trasformazione di datum da WGS84 a Roma 40 per la stazione permanente GPS/GNSS di Terni (UNTR) dell'Università di Perugia. Il grigliato utilizzato è il 335.gr1, relativo al foglio n. 335 della carta d'Italia IGM alla scala 1:50.000, che comprende il punto in oggetto. La trasformazione relativa alla quota è stata quindi eseguita (v. tab. 2) con il modello di geoide ITALGEO99.

La stessa figura 27, in basso, riporta la schermata di FERENS+ relativa alla stessa trasformazione, eseguita con il grigliato 335.gr1 sostituito però per l'altimetria dal grigliato di geoide Geoide\_Umbria\_01.grd (il software usa automaticamente questo file per l'altimetria se esso è presente nella cartella dei grigliati). Le coordinate planimetriche di output sono identiche a quelle calcolate con Verto, mentre la stima della quota ortometrica è leggermente diversa.

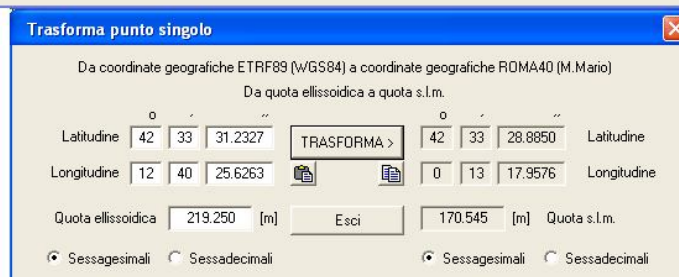
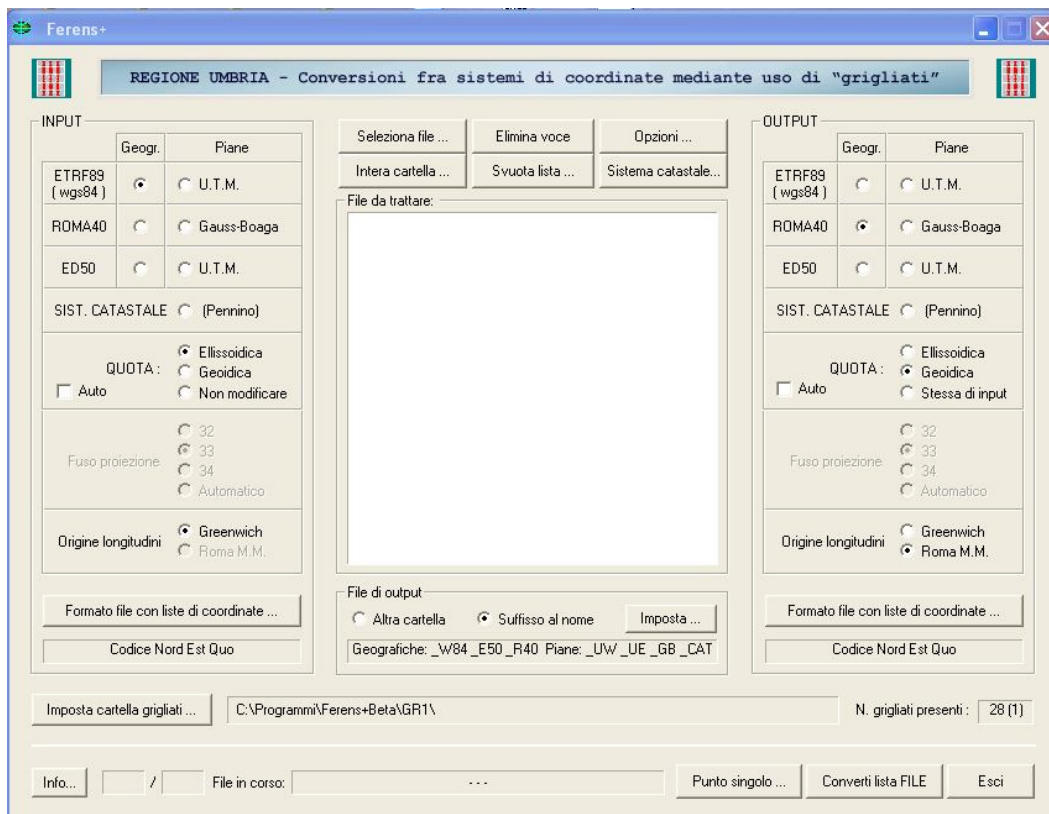
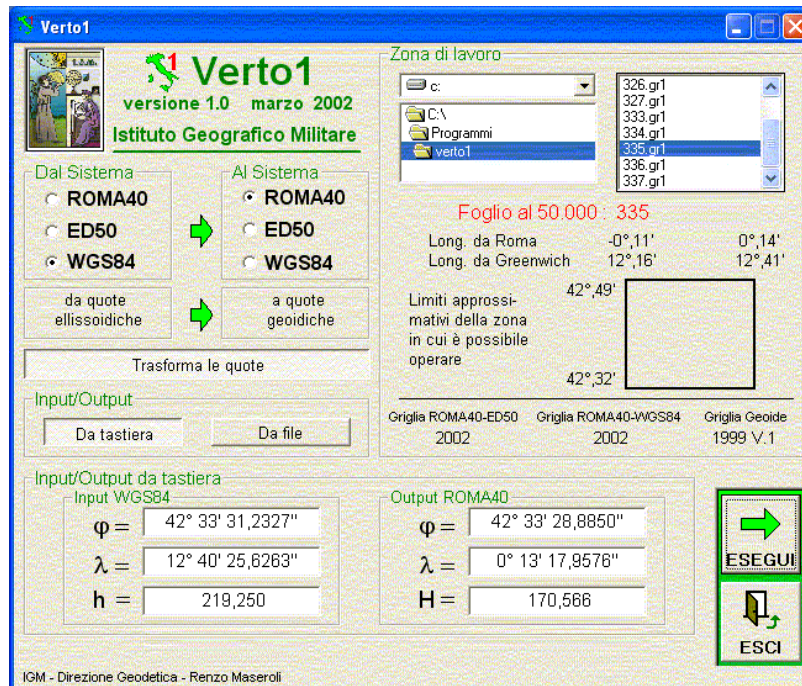


Fig. 27 – Schermate di esempio dei software VERTO1 (in alto) e FERENS+ (in basso): trasformazione di datum WGS84 → Roma40 per la stazione permanente UNTR della rete GPSUMBRIA.



#### 4.4. Altri procedimenti per la trasformazione di datum

##### *Trasformazioni tra datum dinamici:*

Le trasformazioni tra i datum dinamici come ITRS ed ETRS, e tra le diverse realizzazioni degli stessi richiedono l'impiego di algoritmi più complessi rispetto alla trasformazione di Helmert, anche se questa costituisce sempre la base del procedimento.

Si è visto infatti che in questo tipo di datum oltre alle tre dimensioni geometriche occorre tener conto del **tempo** (che di fatto costituisce una quarta dimensione): le coordinate in questi datum sono sempre riferite a un'epoca (data) ben precisa, e sono sempre accompagnate dalle velocità con cui i punti si muovono nel datum. Ricordiamo anche che le velocità in ITRS sono sempre notevolmente superiori a quelle in ETRS, poiché quest'ultimo sistema è vincolato alla zolla continentale europea.

Una trattazione approfondita di questi algoritmi esula dai contenuti del corso. A titolo di esempio, si presenta la procedura di trasformazione per passare da coordinate ITRF2000 di un punto generico riferite a una generica epoca  $\tau$  a coordinate ETRF89 dello stesso punto riferite all'epoca 1989.0 (1 gennaio 1989)<sup>14</sup>:

$$\mathbf{x}_{ETRF89}(1989.0) = \mathbf{x}_{ITRF2000}(\tau) + \mathbf{t} + (\tau - 1989.0) \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}_{ITRF2000}(\tau) + (1989.0 - \tau) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{ETRF89}(1989.0 - \tau) \quad (11)$$

dove:

$\mathbf{x}_{ETRF89}(1989.0)$  è il vettore delle coordinate del punto in ETRF89 all'epoca 1989.0

$\mathbf{x}_{ITRF2000}(\tau)$  è il vettore delle coordinate del punto in ITRF2000 all'epoca  $\tau$

$\mathbf{t}$  è il vettore delle traslazioni tra i due sistemi

$\dot{\mathbf{R}}$  è la derivata rispetto al tempo della matrice di rotazione tra i due sistemi  
ossia la matrice delle velocità di rotazione

$\dot{\mathbf{x}}_{ETRF89}(1989.0 - \tau)$  il vettore delle velocità del punto in ETRF89  
(derivate della posizione rispetto al tempo)

I termini  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{R}$  rappresentano rispettivamente il vettore traslazione e la matrice di rotazione della trasformazione di Helmert tra i due datum. Il fattore di scala viene posto pari a zero, perché le misure associate ai due datum sono dello stesso tipo (GNSS) e molto accurate in entrambi.

##### *Trasformazioni affini nel piano della cartografia:*

Per problemi di trasformazione locali, che interessino zone non troppo estese, può essere in certi casi vantaggioso ricorrere, anziché alla trasformazione di Helmert o altri algoritmi geodetici, a procedimenti più semplici.

Un procedimento utilizzabile per la sola planimetria consiste nell'effettuare il passaggio diretto da coordinate piane cartografiche nel primo datum a coordinate piane cartografiche nel secondo datum.

<sup>14</sup> da Boucher & Altamimi, Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign, 2001

A tale scopo può essere impiegata una **trasformazione affine nel piano**:

$$\begin{aligned} N_2 &= a_1 N_1 + b_1 E_1 + c_1 \\ E_2 &= a_2 N_1 + b_2 E_1 + c_2 \end{aligned} \quad (12)$$

che comporta la stima di **sei parametri**, da effettuare sempre ai minimi quadrati. Sono quindi necessari un minimo di tre punti doppi nell'area di lavoro (3 punti x 2 coordinate = 6 equazioni).

La trasformazione affine nel piano, come quella tridimensionale vista in precedenza, è in grado di modellare in qualche modo le distorsioni locali delle reti, ma introduce a sua volta effetti distorsivi che in molti casi si vogliono evitare (ad es. angoli che in origine erano retti, come quelli tra i lati di un edificio industriale, dopo la trasformazione non sono più retti).

Si può allora utilizzare, se i residui risultano accettabili, una **rototraslazione piana**, semplice o con fattore di scala:

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_0 + (1 + k)\mathbf{R}\mathbf{N}_1 \quad (13)$$

dove  $\mathbf{N}$  rappresenta il vettore delle coordinate piane ( $N, E$ ), mentre  $\mathbf{R}$  e  $k$  sono rispettivamente la matrice di rotazione nel piano e il fattore di scala. I parametri da stimare, in questo caso, scendono a **quattro** (due traslazioni, una rotazione e un fattore di scala) per cui il numero minimo di punti comuni si riduce a due.

Va ancora sottolineato che trasformazioni di questo tipo possono ritenersi valide solo per zone molto limitate (il limite dipende dall'entità delle approssimazioni accettabili, legate alla scala della carta). Un altro svantaggio di questo tipo di procedure locali è che esse risultano *soggettive* in quanto la stima dei parametri è legata alla scelta sia delle formule sia dei punti "doppi" fatta dall'operatore. Questo tipo di procedure viene a volte utilizzato per la georeferenziazione speditiva di cartografia in datum diversi che debba essere ad esempio sovrapposta in un GIS. I risultati ottenuti vanno però valutati con attenzione perché è facile incorrere in errori e forti deformazioni. In generale, sono sempre preferibili i procedimenti geodetici, più rigorosi.

### **Metodi empirici con formule non lineari:**

Per zone più estese, si possono utilizzare espressioni più complesse rispetto alle (12) e (13), ad esempio formule polinomiali, per tener conto meglio dei già citati effetti distorsivi e della differenza di curvatura e orientamento delle superfici ellissoidiche nei due datum. Si tratta sempre di metodi che possiamo definire "empirici", basati su formule aventi struttura ipotizzata a priori e i cui coefficienti vengono stimati con procedimenti statistici.

Un esempio di trasformazione di questo tipo è quella sviluppata dal matematico **P. Bencini** (Sezione Geodetica dell'IGM) per passare dalle coordinate Gauss-Boaga (Datum **Roma 40**) alle coordinate U.T.M. (Datum **ED 50**) e viceversa. Il procedimento è basato su due formule polinomiali incomplete del quarto grado, una per la coordinata Nord e una per la coordinata Est, con 18 coefficienti da stimare. La stima di tali coefficienti venne effettuata dividendo l'Italia in otto zone, e calcolando un set di coefficienti per ciascuna di tali zone<sup>15</sup>. L'approssimazione che si ottiene con l'uso di queste formule è dell'ordine del **metro**, difficilmente superabile, nel caso in oggetto, con altri procedimenti (ivi compresa la trasformazione di Helmert).

Le formule polinomiali di Bencini sono state utilizzate dall'IGM per il calcolo delle coordinate

---

<sup>15</sup> Per ridurre l'entità dei residui è spesso necessario ridurre l'ampiezza della zona in cui sono validi i parametri. Si introduce una complicazione per l'utente ma la trasformazione risulta più accurata.

Gauss-Boaga dei vertici degli elementi delle carte tecniche regionali di tutte le regioni italiane, a partire dalle coordinate ED50 che sono definite dal taglio.

Procedure software attuali come il già citato FERENS+ o il CARTLAB (scaricabile gratuitamente dal nostro sito didattico nella versione free 1.2) utilizzano le formule di Bencini per la trasformazione Roma40 ↔ ED50.

Simili a queste sono altre espressioni polinomiali in coordinate geografiche in uso all'IGM per la trasformazione dai datum di fine '800 (ellissoide di **Bessel** orientato a Genova, a Roma o a Castanea delle Furie) al datum **Roma40**. I parametri vennero stimati considerando come punti doppi quelli della rete IGM del I ordine, per cui l'affidabilità è in generale molto buona. L'approssimazione è stimabile nell'ordine dei 10-20 centimetri, almeno per le zone in cui l'origine del sistema cartografico catastale è certa e ben documentata (in alcune province purtroppo questo non accade).

Dovute probabilmente in origine allo stesso Bencini, e descritte in pubblicazioni di altri autori come ad es. Antongiovanni (1985), queste formule sono particolarmente utili per effettuare la trasformazione di datum tra sistema nazionale e sistemi catastali. Sono utilizzate nei programmi FERENS+ e CARTLAB per le trasformazioni relative ai datum catastali.

### *Trasformazioni calcolate sulla superficie dell'ellissoide:*

Alcune procedure di trasformazione di datum, utilizzabili in genere solo ai fini della planimetria, si basano sulla determinazione di elementi geodetici calcolati sulla superficie dell'ellissoide (ad es. la lunghezza e azimuth di particolari linee geodetiche, ovvero le **coordinate geodetiche polari**) in uno dei due datum, e nel loro "trasporto" sull'altro datum mediante una correzione di orientamento e/o di scala.

Tecniche di questo tipo sono state utilizzate per la trasformazione da coordinate catastali Cassini-Soldner (datum Bessel con vari orientamenti) a coordinate Gauss-Boaga (datum Roma40) con procedimenti sperimentati e descritti da diversi autori quali Cotichia, Surace, Stoppini, Cina ed altri. Forniscono in genere risultati di approssimazione paragonabile a quella delle formule di Bencini in coordinate geografiche sopra descritte.

## **5. RIEPILOGO DELLE TRASFORMAZIONI DI COORDINATE E DATUM PIÙ RICORRENTI**

La figura 28 rappresenta graficamente, in sintesi, alcune trasformazioni di coordinate e di datum ricorrenti con riferimento alla geodesia operativa e alla cartografia in Italia. Sono rappresentati schematicamente i principali datum geodetici in uso, e i tipi di coordinate ad essi associate. Con linea continua sono rappresentate le trasformazioni di coordinate nell'ambito di uno stesso datum; con linea tratteggiata le trasformazioni di datum di tipo affine, e con linea a tratto e punto alcune trasformazioni di datum basate su espressioni di tipo empirico.

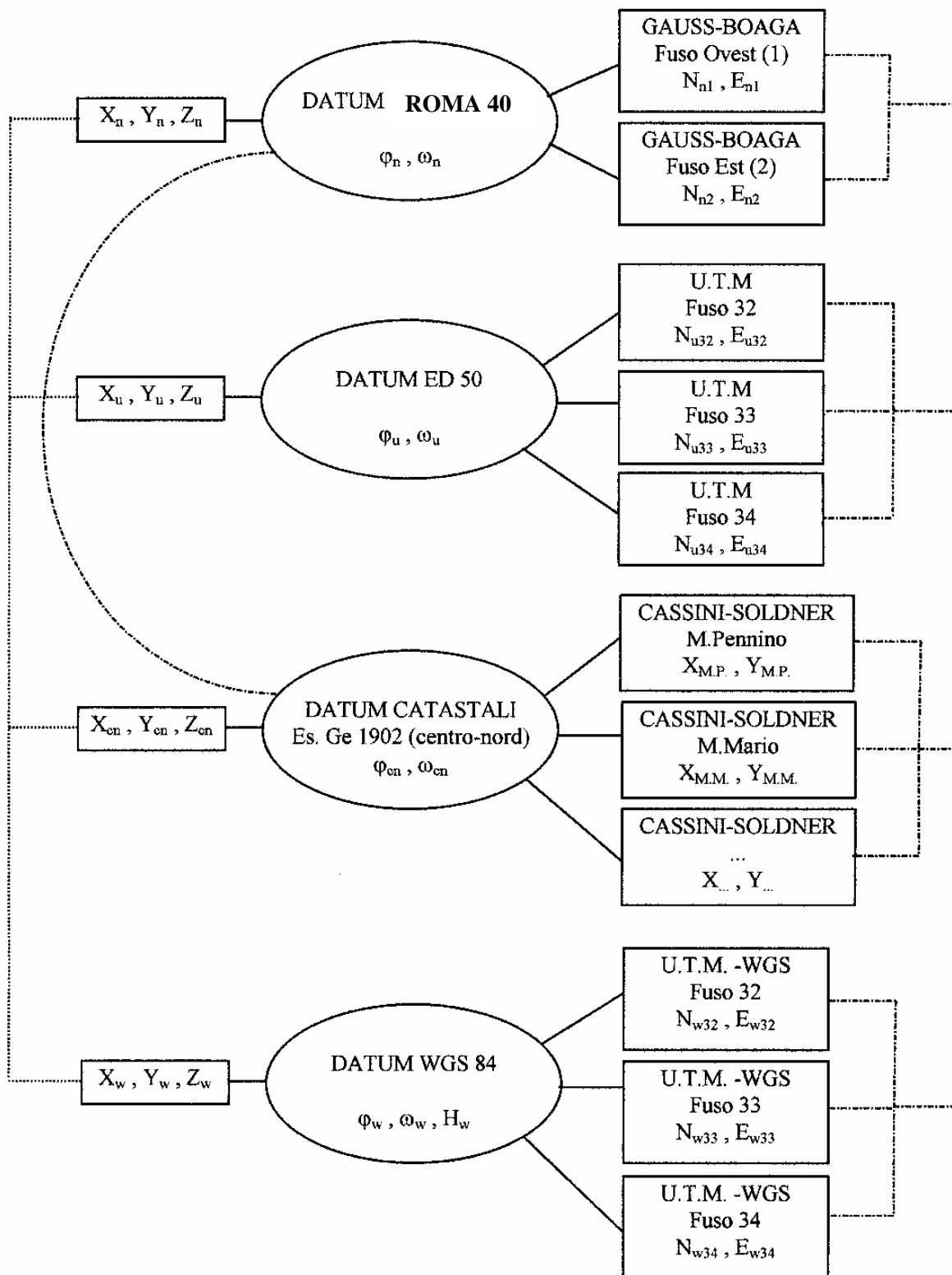


Fig. 28 – Riepilogo delle principali trasformazioni di coordinate e di datum della cartografia italiana.

Legenda:

————— Trasformazioni di coordinate.

..... Trasformazioni di datum (Helmert)

----- Trasformazioni di datum (metodi empirici)