Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria

Corso di Topografia I

Prof. Ing. Aurelio Stoppini
Prof. Ing. Fabio Radicioni

Dispensa:

TRASFORMAZIONI DI DATUM E DI COORDINATE

TRASFORMAZIONI DI DATUM E DI COORDINATE

1. DEFINIZIONE DI DATUM GEODETICO

Si definisce **DATUM** geodetico un sistema di riferimento che permette di esprimere in termini matematici la posizione di punti della superficie fisica della Terra o prossimi ad essa.

E' possibile definire un datum in diversi modi; va però subito osservato che la definizione ha carattere *convenzionale*, e nella pratica è legata a una serie di punti *materializzati* sulla superficie terrestre, ai quali vengono attribuiti determinati valori delle coordinate (tale operazione costituisce la cosiddetta *realizzazione* del datum).

Per la maggior parte delle applicazioni, compreso l'impiego geodetico e topografico del GPS, si utilizzano sistemi di riferimento **solidali con la Terra (Earth-Fixed)**. Per la geodesia astronomica e lo studio del moto dei satelliti si utilizzano invece sistemi inerziali, in cui la Terra è in movimento.

La definizione di datum geodetico è **tridimensionale**, ma viene utilizzata prevalentemente per la **planimetria** (si parla spesso di **horizontal datum**). L'**altimetria** (determinazione delle quote ortometriche o geoidiche) richiede la definizione di un datum a parte (**vertical datum**) basato sul campo gravitazionale e il geoide.

1.1. Definizione dei datum nella geodesia classica

Nella geodesia classica, la definizione di datum è basata sul concetto di *superficie di riferimento*. Nella pratica, la definizione del datum consiste nell'individuare un **ellissoide orientato localmente**.

Si adotta convenzionalmente un determinato ellissoide (ad es. quello di Hayford), del quale sono noti i parametri di dimensione e forma (ad es. semiasse maggiore e schiacciamento). L'ellissoide viene **orientato** in un dato punto (detto **punto di emanazione**) imponendo che in quel punto si verifichino le seguenti condizioni geometriche:

1. *la normale ellissoidica coincida con la verticale;*
2. *la direzione del meridiano ellissoidico coincida con quella del meridiano astronomico;*
3. *la quota ellissoidica coincida con quella ortometrica.*

La procedura classica di orientamento, in sintesi, è la seguente: le coordinate geografiche (latitudine, longitudine) del punto di emanazione vengono determinate per via **astronomica** (effettuando misure su una serie di stelle con un teodolite astronomico), e si determina rispetto alle stelle anche la direzione del meridiano (meridiano celeste o astronomico).

Le coordinate geografiche astronomiche sono poi attribuite al punto di emanazione come coordinate geografiche **ellissoidiche**, mentre la coincidenza del meridiano si ottiene imponendo l'azimut ellissoidico pari a quello astronomico per una determinata direzione.

Nel datum italiano ROMA 40, ad esempio, l’ellissoide è quello di Hayford, e l’orientamento è stato effettuato a Roma M.Mario (osservatorio astronomico e punto di emanazione della rete geodetica nazionale) con misure astronomiche del 1940. La direzione su cui è stata imposta la coincidenza dell’azimut è il lato M.Mario - M.Soratte della rete geodetica fondamentale.

Nel punto di emanazione risulta **nulla la deviazione della verticale**. In pratica, quindi, l'ellissoide orientato localmente risulta **tangente al geoide nel punto di emanazione**. Un ellissoide orientato approssima bene la superficie geoidica (ai fini della planimetria) in un intorno molto vasto del punto di emanazione, fino alle dimensioni di uno Stato o anche di una porzione di continente (fig.1).

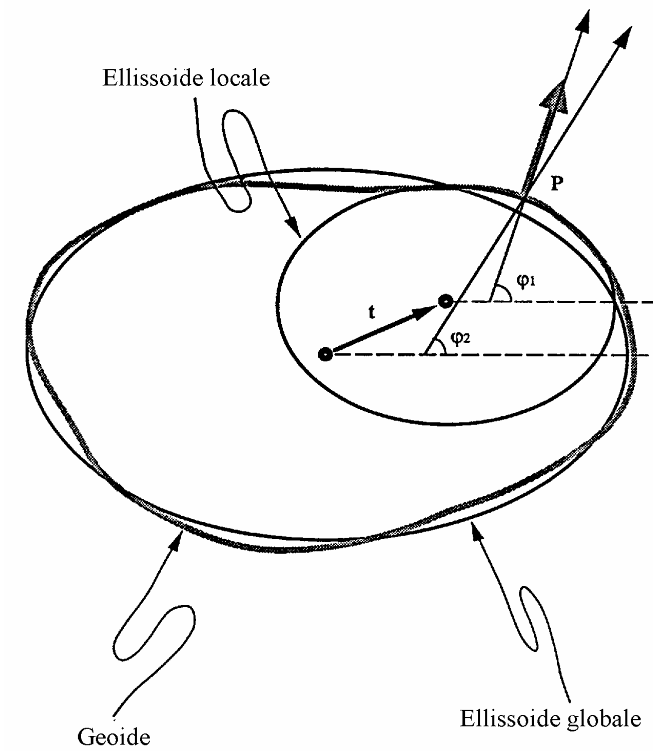

Fig. 1: Geoide, ellissoide locale (orientato localmente) ed ellissoide globale (geocentrico). Da *Beutler*.

Si è detto che, nel concreto, la definizione di datum è legata a una serie di punti materializzati sul terreno. In pratica, **a ogni datum geodetico è strettamente associata una rete geodetica**, derivante da un dato gruppo di misure e dal relativo calcolo di compensazione. Il calcolo della rete fornisce le coordinate geografiche ellissoidiche dei suoi vertici nel datum adottato. Pertanto la rete geodetica, mediante le coordinate dei suoi vertici, definisce e materializza il datum fino a distanze notevoli dal punto di emanazione. Si usa dire che la rete costituisce la **realizzazione** del datum. Va tenuto presente che, derivando da misure, la rete geodetica è inevitabilmente caratterizzata da **deformazioni** dovute agli errori di misura, che nella pratica influenzano la concreta definizione del datum.

In genere, ogni nazione è dotata di un proprio datum geodetico, la cui definizione resta valida per molto tempo. In Italia, a causa dell'evoluzione storica delle reti geodetiche e della cartografia, si utilizzano ancora oggi diverse definizioni "classiche" di datum, tra cui le principali sono le seguenti:

a) **<u>Sistema geodetico nazionale</u>** (detto anche **"<u>Roma 40</u>"** o **"<u>M.Mario 1940</u>"**): ellissoide internazionale (Hayford) orientato a Roma M.Mario con dati astronomici del 1940.
   Il meridiano fondamentale è quello di M.Mario: per riferire le longitudini al meridiano di Greenwich va sommata ad esse una costante pari a 12°27'08,400" (longitudine Est di M.Mario da Greenwich).
   La rete geodetica associata è quella di triangolazione dell'IGM (Istituto Geografico Militare, massimo ente geodetico-cartografico dello Stato), distinta in I, II, III e IV ordine.
   E' adottato per la cartografia nazionale e regionale (coordinate piane "Gauss-Boaga"), e per la cartografia catastale limitatamente ad alcune province.

b) **<u>Sistema geodetico ED 50</u>** (ED = European Datum): ellissoide internazionale (Hayford) con "orientamento medio europeo" (la deviazione della verticale si annulla nella zona di Potsdam in Germania), calcolato nel 1950.
   Il meridiano fondamentale è quello di Greenwich. La rete associata deriva da una selezione di catene di triangoli tratte dalle reti dei singoli stati, compensate in blocco a livello europeo.
   Viene utilizzato per la definizione delle coordinate piane U.T.M.-ED50, e per il taglio (suddivisione in fogli) della cartografia IGM di nuova produzione e di quella regionale.

c) **<u>Sistemi geodetici catastali</u>**, derivanti dai sistemi geodetici adottati nei lavori IGM alla fine del secolo scorso o ai primi del '900: i tre datum principali impiegano l'ellissoide di Bessel orientato a *Genova* (per l'Italia centro-nord), a *Castanea delle Furie* (per l'Italia meridionale) o a *Roma M. Mario* (parte dell'Italia centrale), ma esistono anche altre definizioni valide per piccole zone.

Il meridiano fondamentale è quello passante per il rispettivo punto di emanazione (Genova, M.Mario o Castanea). La rete associata è quella dell'IGM di I, II e II ordine (allo stato in cui si trovava ai primi del '900) integrata dalle reti catastali di raffittimento (rete, sottorete e dettaglio). Vengono utilizzati nella cartografia catastale e nei GIS che hanno tale cartografia come base.

La tabella 1 allegata riassume le definizioni dei principali datum geodetici impiegati in Italia, assieme alle reti ed alle rappresentazioni cartografiche associate (v. seconda parte del corso di Topografia I).

1.2. Definizione dei datum nella geodesia satellitare

Nella geodesia satellitare (attualmente basata principalmente sul sistema GPS, e in misura minore sul GLONASS) si utilizzano datum geodetici di tipo *globale*, validi cioè per tutto il mondo; si differenziano in questo da quelli della geodesia classica, che come si è visto avevano validità *locale*, anche se a volte per zone molto grandi.

La definizione di un datum globale è basata su una terna d'assi $OXYZ$ **geocentrica**, avente cioè l'origine coincidente con il centro di massa della Terra. L'asse Z coincide con l'asse polare (asse di rotazione della Terra); gli assi X ed Y giacciono sul piano equatoriale, con l'asse X diretto secondo il meridiano fondamentale (quello di Greenwich) e Y diretto in modo da completare una terna destrogira (fig.2). La terna geocentrica è *solidale* alla Terra, cioè la segue rigidamente nel suo moto: per questo, tali sistemi vengono denominati **ECEF (= *Earth-Centered-Earth-Fixed*).**

Si tratta anche in questo caso di una definizione *convenzionale*, dato che la posizione del geocentro e la direzione dell'asse polare (quest'ultima variabile nel tempo) devono essere stabilite convenzionalmente. La definizione adottata attualmente per le applicazioni del GPS è detta **WGS84** (WGS = World Geodetic System, sistema geodetico mondiale).

Per analogia con i sistemi classici e per rendere più agevole la georeferenziazione di punti (per mezzo delle usuali coordinate geografiche) alla terna cartesiana è associato un **ellissoide geocentrico**, avente centro coincidente con quello della terna ed assi orientati secondo le direzioni XYZ (si veda ancora la fig. 2). Per il sistema WGS84 i parametri dell'ellissoide adottato sono i seguenti:

$$a = 6378137 \text{ m} \qquad \alpha = 1/298.2572221$$

La definizione del datum WGS 84 è in realtà più complessa, comprendendo anche una serie di parametri fisico-meccanici (massa della Terra, velocità di rotazione della Terra, ecc.). Ai fini delle applicazioni geodetico-topografiche più comuni, è tuttavia sufficiente conoscere i soli parametri geometrici sopra citati.

Anche nel caso dei datum globali, la concreta definizione del sistema di riferimento passa attraverso punti materializzati sul terreno, dei quali vengono stabilite le coordinate. Anche in questo caso, quindi, al datum è associata una *rete geodetica*: si tratta di reti internazionali, raffittite poi a livello nazionale. In Italia, la rete geodetica che *realizza* il datum WGS84 è la rete IGM95, determinata dall'Istituto Geografico Militare con misure GPS eseguite intorno alla metà degli anni '90. Tale rete costituisce un raffittimento della rete europea EUREF (che a sua volta è parte della rete mondiale IGS) basata sul datum europeo ETRS89, solidale alla piattaforma continentale europea e praticamente coincidente con il WGS84.

Esistono poi, a livello locale, reti realizzate o in corso di realizzazione da parte di vari Enti (Regioni, Catasto, Province, ecc.) che raffittiscono ulteriormente la rete IGM95. Negli ultimi anni sono inoltre entrate in funzione in Italia numerose stazioni permanenti GPS/GNSS, per molte delle quali sono state calcolate le coordinate WGS84 mediante collegamenti alla rete IGM95. Con questi progressivi raffittimenti, il sistema WGS84 viene materializzato sul territorio e diviene praticamente accessibile a tutti gli utenti tecnici.

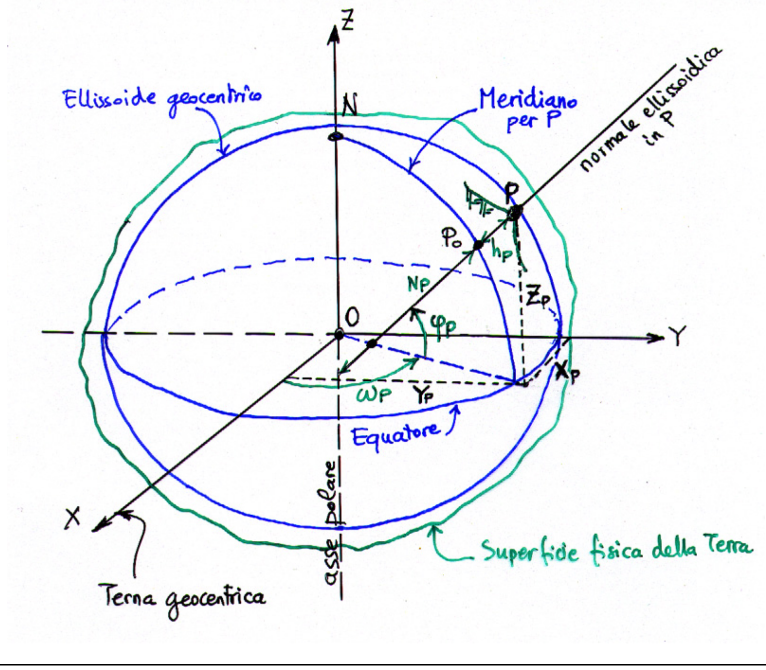

Fig. 2: Terna geocentrica, coordinate geocentriche, ellissoide geocentrico

DATUM GEODETICI			RETI DI INQUADRAMENTO ASSOCIATE			SISTEMI CARTOGRAFICI ASSOCIATI			
Denominazione	**Ellissoide**	**Orientamento**	**Denominazione**	**Epoca determ.**	**Tipo**	**Denominazione**	**Proiezione**	**Zone di validità**	**Applicazioni cartografiche**
SISTEMA NAZIONALE	Internazionale (Hayford)	Roma M.Mario 1940	Rete geodetica nazionale	ca.1880-1996	Triangolazione + EDM	GAUSS-BOAGA	Gauss k = 0,9996	Fuso Ovest (1)	IGM (vecchia prod.): inquadramento e taglio IGM (prod. recente): inquadramento
								Fuso Est (2)	REGIONI : inquadramento CATASTO : inquadramento e taglio (parz.)
SISTEMA ED 50	Internazionale (Hayford)	Or. medio europeo ca. 1950	Rete ED 50 (selez. catene da reti nazionali)	ca. 1944-1950	Triangolazione	U.T.M.	Gauss k = 0,9996	Fuso 32	IGM (tutta la prod.): reticolato chilometrico
								Fuso 33	IGM (prod. recente): taglio
								Fuso 34	REGIONI : taglio
SISTEMI CATASTALI	Bessel	Genova 1902 (centro nord)	Rete IGM ante 1919	ca. 1880-1919	Triangolazione	CATASTALE	Cassini-Soldner	31 "grandi"	CATASTO : inquadramento e taglio
		Castanea d. Furie (sud)	e					ca. 800 "piccoli"	
		Altri (validità locale)	Reti catastali di raffittimento	ca. 1880-1940	Triangolazione				
SISTEMA WGS 84 (*)	WGS84	Geocentrico	Rete IGM 95	1992-1996	GPS (**)	U.T.M. - WGS	Gauss	Fuso 32	Produzione nuova cartografia
			Raffittimenti locali	1995 - ...	GPS		k = 0,9996	Fuso 33	GIS con uso di dati GPS
ALTRI: ED 79 IGM 83 ...	Internazionale (Hayford)		Ricalcolo di reti esistenti integrate da nuove osservazioni						

Note:

(*) Sistema tridimensionale, con quote riferite all'ellissoide (quote ellissoidiche)

(**) Rete GPS integrata da misure astronomiche e collegamenti alla rete di livellazione nazionale

Tabella 1 - I principali sistemi geodetico-cartografici utilizzati in Italia

1.3. Principali differenze tra datum regionali e datum globale

La figura 1 mette in rilievo la differenza tra i datum della geodesia classica, che possono essere definiti *locali* o *regionali* in quanto approssimano bene il geoide solo in un intorno del punto di emanazione, e il datum *globale* WGS 84, che approssima il geoide nel suo complesso ed è valido per tutto il mondo.

I **datum locali o regionali**, concepiti per le misure classiche, realizzano l'obiettivo di rendere bassa la deviazione della verticale in modo da poterla trascurare, permettendo così di trasferire gli angoli misurati dal terreno all'ellissoide, senza correzioni. Le ondulazioni geoidiche rispetto a un ellissoide di questo tipo, nell’area di utilizzo, sono modeste (qualche metro). Questi datum classici vengono utilizzati solo come *datum orizzontali*, cioè solo ai fini della planimetria. Per l'altimetria, sono integrati da un *datum verticale* che consiste praticamente nella definizione di un modello del geoide integrata con una rete di livellazione.

I **datum globali** sono invece concepiti come supporto alle misure satellitari: ad es. al datum WGS84 sono riferite le coordinate orbitali (*effemeridi*) dei satelliti GPS che ruotano attorno alla Terra, per cui è indispensabile assumere una definizione unica per tutto il mondo. La deviazione della verticale varia da zona a zona, e risulta modesta solo nelle zone in cui la "pendenza" del geoide (cioè il gradiente delle ondulazioni) non è molto accentuata. Le ondulazioni geoidiche rispetto all’ellissoide geocentrico possono raggiungere valori di svariate decine di metri, positive o negative. I datum globali vengono utilizzati come datum *tridimensionali*, permettendo di definire l'altimetria mediante le *altezze ellissoidiche*. Mediante un opportuno modello di geoide (andamento delle ondulazioni geoidiche), le altezze ellissoidiche vengono poi ridotte a quote ortometriche, riconducendosi quindi a un datum verticale coerente con quello classico.

1.4. Effetto pratico della scelta del datum

A conclusione delle considerazioni svolte sui datum geodetici, è opportuno far ben presente qual’è l’implicazione pratica dell’utilizzo di un determinato datum piuttosto che di un altro.

Le differenze di forma e dimensioni degli ellissoidi associati ai diversi datum, e la diversa posizione rispetto alla superficie fisica della Terra dovuta al diverso orientamento, fanno sì che le coordinate geografiche di uno stesso punto valutate in datum diversi siano sensibilmente differenti tra loro. Le differenze possono essere anche dell'ordine di <u>alcune centinaia di metri</u>: è quindi **sempre indispensabile stabilire con precisione il datum in cui si opera**, quando si assegnano o si utilizzano coordinate di punti.

2. SISTEMI DI COORDINATE IN GEODESIA

Una volta che sia stato definito il datum geodetico in cui si opera, la posizione di un punto può essere individuata, pur restando nello stesso datum, mediante diversi **sistemi di coordinate**, tra di loro praticamente equivalenti perché è possibile passare dall'uno all'altro con le opportune formule di trasformazione.

Di seguito, si elencano i principali sistemi di coordinate utilizzati nella geodesia operativa, con le rispettive caratteristiche ed i relativi campi di applicazione. Alcuni di essi sono tridimensionali, mentre altri comprendono solo informazioni planimetriche.

2.1. Coordinate geografiche ellissoidiche

Le coordinate geografiche φ (*latitudine*) e ω (*longitudine*) sono state definite trattando la geometria dell'ellissoide. La coppia di valori (φ, ω) definisce la posizione planimetrica di un punto, ovvero la posizione della **proiezione** del punto sull'ellissoide (Po in fig. 2).

Nell'approccio classico, l'altimetria viene trattata a parte. Nella geodesia satellitare, data la natura tridimensionale delle osservazioni, alla coppia (φ, ω) viene associata la *quota ellissoidica h*. La terna (φ, ω, h) definisce la posizione tridimensionale di un punto. Nella fig. 2 sono ben visibili le coordinate φ_P, ω_P, h_P del punto P (punto generico, non appartenente all'ellissoide).

Tra tutti i tipi di coordinate, le geografiche sono quelle di impiego più generale: vengono utilizzate per fornire i risultati della compensazione delle reti (sia trigonometriche classiche che GPS), per individuare i vertici nelle monografie e nei cataloghi, e per i problemi di posizionamento e georeferenziazione in generale.

2.2. Coordinate cartesiane geocentriche

Le coordinate geocentriche (X, Y, Z) sono le coordinate cartesiane di un punto rispetto alla terna d'assi geocentrica *OXYZ* (fig.2). La terna di valori (X, Y, Z) definisce la posizione tridimensionale di un punto in modo del tutto equivalente alla terna (φ, ω, h) riferita all'ellissoide geocentrico, avente gli assi lungo le direzioni X, Y, Z.

Le coordinate geocentriche individuano la posizione tridimensionale di un punto senza ambiguità. Di solito, però, si preferisce esprimere i risultati di un rilevamento con le coordinate geografiche, il cui significato risulta più intuitivo e confrontabile con risultati di misure classiche.

2.3. Coordinate cartesiane locali

Le coordinate cartesiane locali (e, n, h) sono le coordinate di un punto rispetto alla cosiddetta "terna euleriana" $P_0\,neh$ avente origine in un punto P_0 della superficie ellissoidica, asse h diretto secondo la normale all'ellissoide in P_0, assi e ed n nel piano tangente, rispettivamente tangenti al meridiano e al parallelo per P_0 (fig. 3).

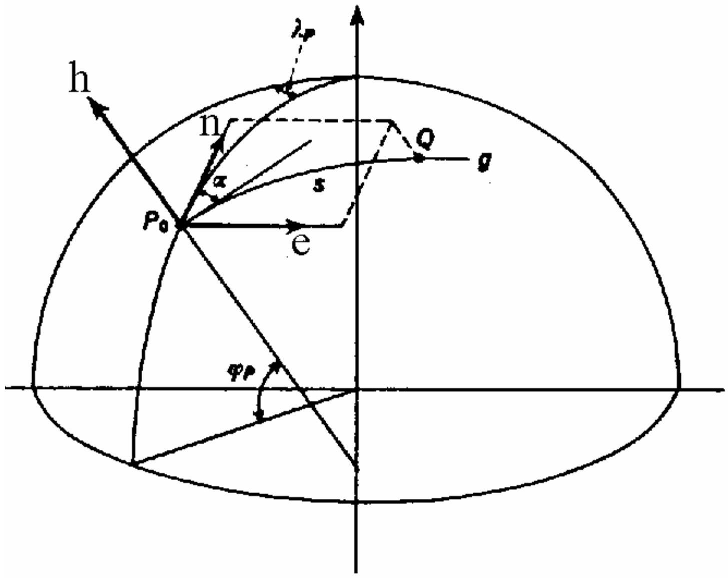

Fig. 3: Terna euleriana, coordinate cartesiane locali

Questo sistema viene talvolta utilizzato nei rilievi GPS per esprimere posizioni tridimensionali o altre grandezze vettoriali (baselines, residui, spostamenti, ecc.) in un sistema che, pur essendo cartesiano, è locale e aderente al terreno, e permette di scindere (anche se non rigorosamente) la componente altimetrica da quelle planimetriche. Le coordinate cartesiane locali, in un intorno dell'origine, corrispondono praticamente alle coordinate che si potrebbero misurare sul piano tangente, e quindi risultano particolarmente utili per tracciamenti in cantiere e altri problemi ingegneristici.

Ovviamente, un riferimento euleriano può essere utilizzato solo in un limitato intorno dell'origine P_o.

2.4. Coordinate geodetiche locali

La posizione planimetrica di un punto può essere espressa (v. fig. 4) mediante le **coordinate geodetiche polari** (s, α) rispetto ad un punto O dell'ellissoide assunto come origine (detto *polo*), definito dalle sue coordinate geografiche (φ_0, ω_0). La coordinata s (*distanza polare*) rappresenta la distanza del punto dal polo, misurata lungo un arco di geodetica, mentre α (detto *azimut geodetico* o semplicemente *azimut*) è l'angolo formato dalla geodetica con il meridiano per *O* , contato in senso orario a partire dal Nord.

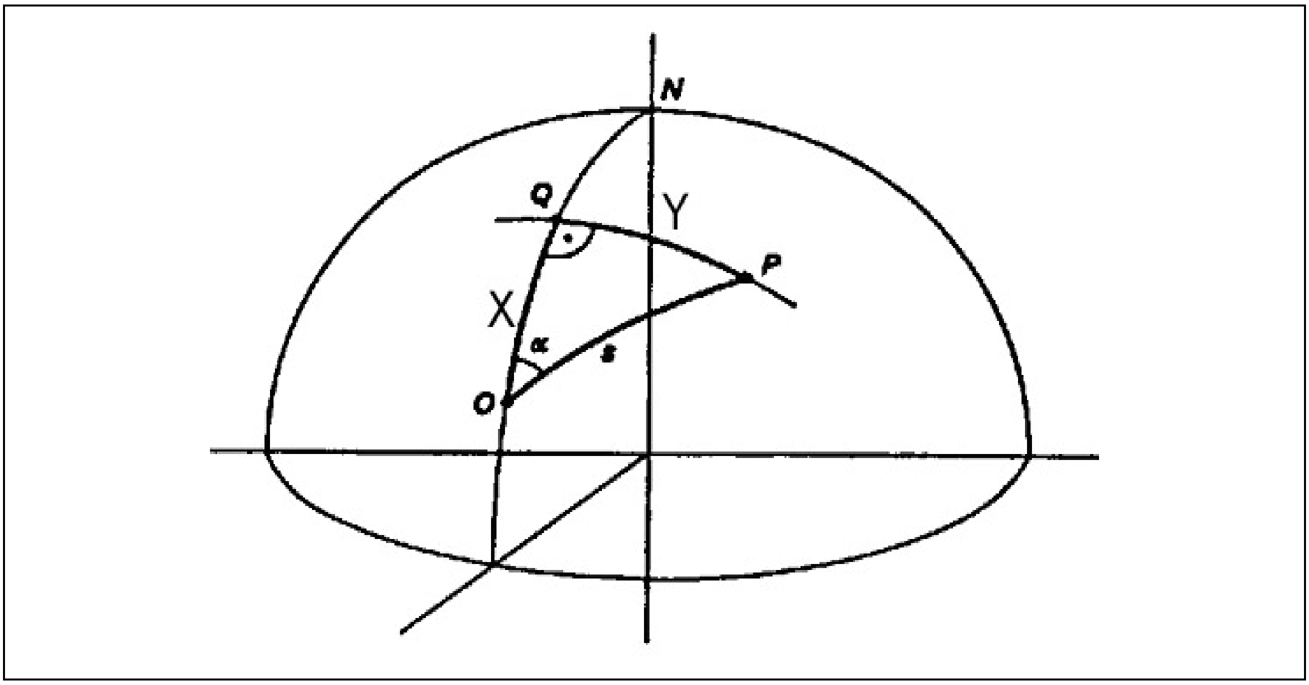

Fig. 4: Coordinate geodetiche polari e ortogonali

In modo equivalente, la posizione planimetrica di un punto può essere espressa (v. ancora la fig. 4) mediante le **coordinate geodetiche ortogonali** o **rettangolari** (*X*, *Y*) rispetto ad un punto *O* noto, assunto come origine. La coordinata *X* rappresenta la lunghezza dell'arco di meridiano compreso tra *O* e *Q* , piede della geodetica perpendicolare al meridiano condotta da *P*. La *Y* è la lunghezza dell'arco di geodetica *Q-P*.

Questi due sistemi, tra loro equivalenti (la trasformazione diretta e inversa è particolarmente semplice), hanno validità locale, sono adatti cioè a definire posizioni nell'intorno dell'origine P_0 , e vengono utilizzati prevalentemente nella geodesia classica.

Le coordinate geodetiche ortogonali coincidono con le coordinate piane cartografiche CASSINI-SOLDNER ancora utilizzate dal Catasto in molte province.

2.4. Coordinate piane cartografiche

La posizione planimetrica di un punto può essere espressa anche mediante le sue coordinate piane in una qualsiasi rappresentazione cartografica (v. seconda parte del corso). Dato che la rappresentazione cartografica stabilisce una corrispondenza biunivoca tra ellissoide e piano della carta, **le coordinate piane cartografiche sono in pratica del tutto equivalenti alle coordinate geografiche** (φ, ω), alle quali possono essere ricondotte con le equazioni della carta e le inverse.

In Italia, vengono utilizzate prevalentemente le coordinate *Gauss-Boaga* (*N, E*) e le coordinate catastali *Cassini-Soldner* (*X, Y*). Per la loro praticità d'uso, le coordinate cartografiche sono le più utilizzate per definire le posizioni planimetriche nei rilevamenti, sia nella fotogrammetria che nel rilievo a terra con tecniche topografiche tradizionali o GPS.

3. TRASFORMAZIONI DI COORDINATE ALL'INTERNO DI UN DATUM

3.1. Premessa

Prima di passare all'esame dei procedimenti di trasformazione più ricorrenti, è opportuno sottolineare la differenza fra **trasformazioni di coordinate** (nell'ambito di uno stesso datum geodetico) e **trasformazioni di datum** (passaggio da un datum geodetico ad un altro). Si tratta di due operazioni concettualmente ben distinte:

- Le **trasformazioni di coordinate** sono generalmente risolubili in forma analitica chiusa, o comunque con operazioni geometrico-matematiche ben definibili teoricamente, che nella maggior parte dei casi non comportano in pratica alcuna perdita di precisione dei dati originari se non per gli arrotondamenti di calcolo.
- Le trasformazioni **di datum,** essendo i datum "realizzati" da reti geodetiche affette da errori**,** si basano necessariamente sull'utilizzo di parametri determinati statisticamente in base alla conoscenza delle coordinate in entrambi i datum per un certo numero di punti. Di conseguenza, questo secondo tipo di passaggi comporta quasi sempre indeterminazioni di uno o più ordini di grandezza superiori a quelle derivanti da una trasformazione di coordinate.

Di seguito, si presentano i problemi di trasformazione di coordinate più significativi e ricorrenti nella pratica.

3.2. Da geografiche ellissoidiche a cartesiane geocentriche (e viceversa)

E' una trasformazione tipica delle applicazioni GPS. E' tridimensionale, cioè interessa contemporaneamente planimetria e altimetria.

- *Trasformazione diretta (da geografiche a geocentriche)*

Le equazioni parametriche dell'ellissoide:

$$\begin{cases} X = N \cdot \cos\varphi \cdot \cos\omega \\ Y = N \cdot \cos\varphi \cdot \sin\omega \\ Z = N \cdot \left(1 - e^2\right) \cdot \sin\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

forniscono le coordinate cartesiane di un punto P_0 appartenente alla superficie ellissoidica, in funzione delle sue coordinate geografiche (φ, ω).

Per un generico punto P situato a una quota ellissoidica h rispetto alla superficie ellissoidica (fig.2), le equazioni si modificano come segue:

$$\begin{cases} X = (N + h)\cos\varphi \cdot \cos\omega \\ Y = (N + h)\cos\varphi \cdot \sin\omega \\ Z = \left[N\left(1 - e^2\right) + h\right]\sin\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

Queste espressioni permettono di eseguire la trasformazione da coordinate geografiche (e quota ellissoidica) a coordinate cartesiane geocentriche.

- *Trasformazione inversa (da geocentriche a geografiche)*

La trasformazione inversa non è ottenibile in modo immediato. La letteratura riporta numerosi metodi di inversione delle (2), alcuni dei quali iterativi o basati sulla soluzione di un'equazione trascendente o di grado elevato. Si riporta qui una soluzione dovuta a BOWRING che ha il vantaggio di essere in forma chiusa:

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{Z + e'^2 b \cdot \sin^3\theta}{p - e^2 a \cdot \cos^3\theta} \qquad (3)$$

$$\omega = \text{arctg}\,\frac{Y}{X} \qquad (4)$$

$$h = \frac{p}{\cos\varphi} - N \qquad (5)$$

dove p è la distanza dall'asse polare, ricavabile da:

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} \qquad (6)$$

e’^{2} è la “seconda eccentricità” $\quad$ e’^{2} = $\dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$

e θ è un angolo ausiliario fornito da:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Za}{pb}\right) \tag{7}$$

- ***Esempio numerico:***

Le coordinate geocentriche di un punto nel sistema WGS 84 sono le seguenti:

X = 4.562.091,708 m

Y = 978.251,742 m

Z = 4.334.543,222 m

Con i parametri dell'ellissoide WGS84, dalle formule di Bowring si ottengono i seguenti valori delle coordinate geografiche:

φ = 43° 05' 02,9318"

ω = 12° 06' 09,6836"

h = 306,344 m

3.3. Da cartesiane geocentriche a cartesiane locali (terna euleriana) e viceversa

- *Trasformazione diretta (da geocentriche a locali)*

E' una trasformazione che riguarda coordinate tridimensionali, quindi interessa planimetria ed altimetria. Sia P_0 , di coordinate geocentriche note (X_0 , Y_0 , Z_0), l'origine della terna euleriana (v. fig. 3). Sia P un punto generico, di coordinate geocentriche (X , Y , Z). Si calcolano dapprima le differenze di coordinate tra P e P_0 , cioè le componenti del vettore "baseline" P- P_0 :

$$\begin{aligned} \Delta X &= X - X_0 \\ \Delta Y &= Y - Y_0 \\ \Delta Z &= Z - Z_0 \end{aligned} \tag{8}$$

Le coordinate (e, n, h) di P si ottengono poi mediante le formule di rotazione tra i due sistemi:

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ h \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\varphi,\omega) \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \tag{9}$$

dove $\mathbf{R}(\varphi, \omega)$ è la matrice di rotazione data da:

$$\mathbf{R}(\varphi, \omega) = \begin{bmatrix} -sen\omega & \cos\omega & 0 \\ -sen\varphi\cos\omega & -sen\varphi sen\omega & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\omega & \cos\varphi sen\omega & sen\varphi \end{bmatrix} \tag{10}$$

calcolata per le coordinate geografiche di P_0 , ottenibili dalle geocentriche mediante le formule di Bowring.

- *Trasformazione inversa (da locali a geocentriche)*

Si ottiene facilmente invertendo le (9):

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1}(\varphi,\omega)\begin{bmatrix} e \\ n \\ h \end{bmatrix} \tag{11}$$

la matrice inversa $\mathbf{R}^{-1}(\varphi, \omega)$ risulta uguale alla trasposta:

$$\mathbf{R}^{-1}(\varphi, \omega) = \mathbf{R}^{T}(\varphi, \omega) = \begin{bmatrix} -sen\omega & -sen\varphi\cos\omega & \cos\varphi\cos\omega \\ \cos\omega & -sen\varphi sen\omega & \cos\varphi sen\omega \\ 0 & \cos\varphi & sen\varphi \end{bmatrix} \tag{12}$$

e le coordinate geografiche sono sempre quelle dell'origine P_0 . Le coordinate geocentriche di P si ottengono infine da:

$$X = X_0 + \Delta X$$

$$Y = Y_0 + \Delta Y \tag{13}$$

$$Z = Z_0 + \Delta Z$$

3.4. Da geodetiche polari a geografiche (e viceversa)

- *Trasformazione diretta (da geodetiche polari a geografiche)*

Questa trasformazione è relativa alla sola planimetria. E' un problema classico, noto come "Primo problema fondamentale della Geodesia", o anche "trasporto di coordinate geografiche lungo un arco di geodetica". Per le espressioni necessarie (sviluppi di LEGENDRE-DELAMBRE o formule più complesse per archi di geodetica molto lunghi) si rimanda al testo (Folloni). Questa trasformazione è tipica della Geodesia classica e non è di uso frequente nelle applicazioni del GPS.

Per effettuare la trasformazione, è ovviamente necessario conoscere le coordinate geografiche del polo.

- *Trasformazione inversa (da geografiche a geodetiche polari)*

Anche questo è un problema classico, noto come "Secondo problema fondamentale della Geodesia". Si rimanda anche in questo caso al testo, dove è descritto un procedimento che utilizza la rappresentazione conforme di Gauss.

3.5. Da geografiche a geodetiche rettangolari (e viceversa)

Il procedimento diretto e inverso per questa trasformazione, che interessa la sola planimetria, verrà descritto nella successiva dispensa di Cartografia, in quanto viene prevalentemente utilizzato per il calcolo delle coordinate catastali piane Cassini-Soldner, che sono numericamente uguali alle coordinate geodetiche rettangolari.

3.6. Da geodetiche polari a geodetiche rettangolari (e viceversa)

Anche questa trasformazione, ottenibile semplicemente, rientra fra gli algoritmi più classici della Geodesia. La trasformazione riguarda solo la planimetria. Per le relative espressioni dirette e inverse, derivanti dalla risoluzione di un triangolo ellissoidico, si rimanda al libro di testo.

3.7. Da geografiche a piane cartografiche (e viceversa)

Il passaggio da coordinate geografiche a cartografiche (in base al tipo di rappresentazione cartografica adottato) si effettua con le formule di corrispondenza dirette ed inverse. La trasformazione è relativa alla sola planimetria. Per le espressioni necessarie, si rimanda alla successiva dispensa relativa alla Cartografia.

3.8. Quadro di riepilogo delle principali trasformazioni di coordinate

La figura 5 sintetizza le principali trasformazioni di coordinate effettuabili, si ripete ancora una volta, <u>all’interno di un datum geodetico ben definito</u>. Nello schema sono indicati i passaggi più usualmente eseguiti (e sopra descritti), distinguendo fra le trasformazioni 2D (che riguardano la sola planimetria) e quelle 3D (planimetria e quota ellissoidica).

Naturalmente, è possibile effettuare trasformazioni più complesse mediante l’effettuazione in serie di passaggi successivi.

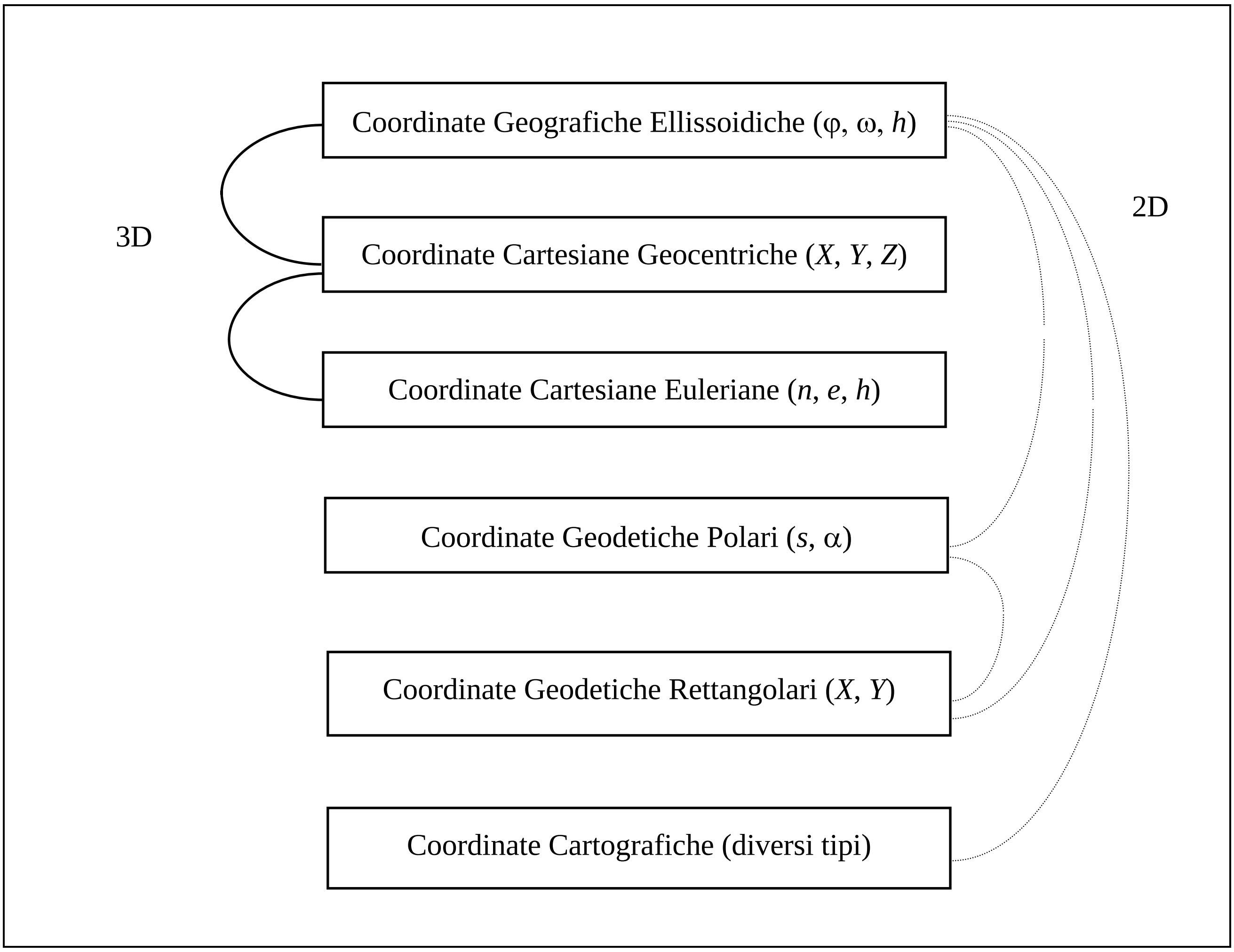

Fig. 5 : Riepilogo delle principali trasformazioni di coordinate eseguibili nell'ambito di **un** datum.

4. TRASFORMAZIONI DI DATUM GEODETICO

4.1. Premessa

Si tratta in questo caso di passare da un sistema di riferimento geodetico ad un altro. Le differenze possono essere notevoli. Ad esempio, le coordinate geografiche del vertice trigonometrico di Castiglion del Lago (appartenente alla rete IGM 95) espresse in diversi datum sono le seguenti:

Roma 40:	φ = 43° 07' 37,250"
	ω = – 0° 23' 47,323" E M.Mario = 12° 03' 21,077" E Greenwich
WGS 84:	φ = 43° 07' 39,584"
	ω = 12° 03' 20,248" E Greenwich
Bessel Genova:	φ = 43° 07' 36,766"
(catastale)	ω = 12° 03' 19,399" E Greenwich

La massima differenza in latitudine è di quasi 3", che corrispondono a circa 90 metri. L'esempio fa capire come sia **indispensabile** precisare il datum a cui si fa riferimento. La figura 6 chiarisce meglio, grazie alla grafica, questo concetto.

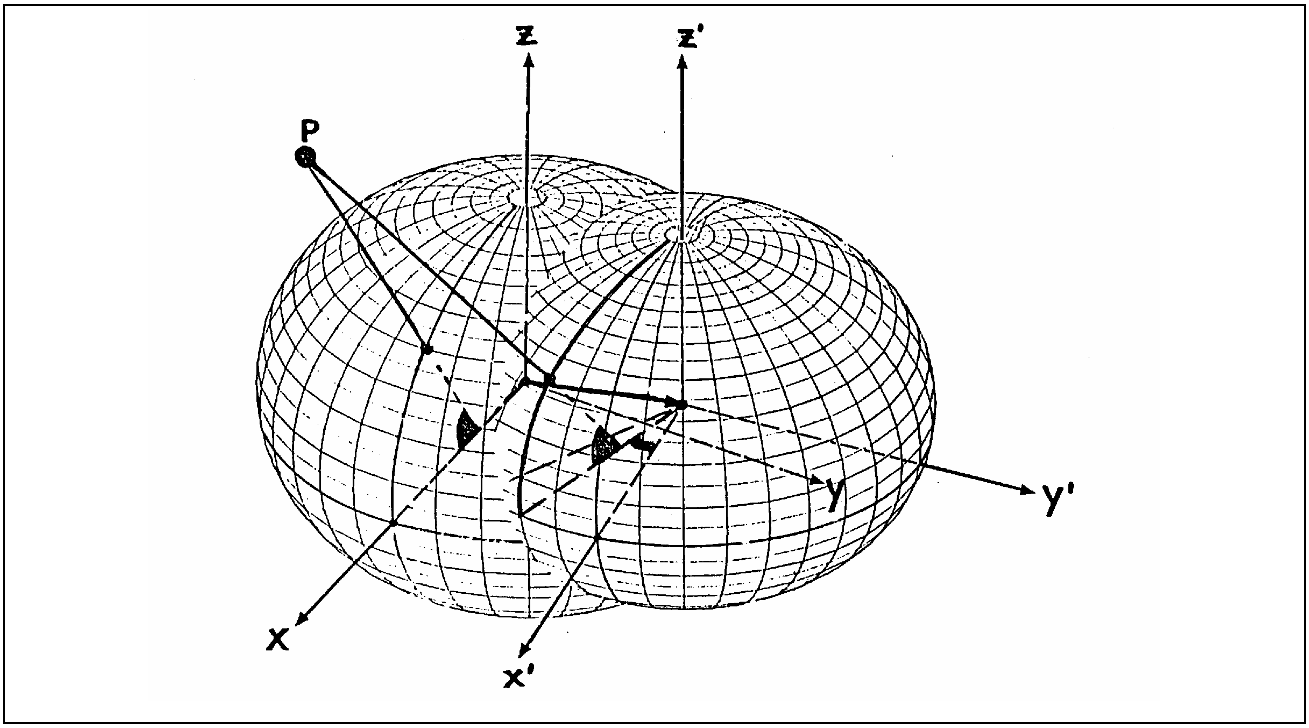

Fig. 6: Uno stesso punto P riferito a due diversi datum geodetici ha coordinate geografiche diverse (n.b. gli scostamenti sono esasperati). Da *Beutler*

Le procedure utilizzate in geodesia per effettuare trasformazioni di datum possono essere raggruppate in due categorie:

- procedimenti basati su una trasformazione fra sistemi cartesiani nello spazio;
- trasformazioni di tipo empirico valide localmente.

4.2. Trasformazioni fra sistemi cartesiani nello spazio (trasformazione di Helmert)

Con questo approccio, la trasformazione di datum viene eseguita operando sulle coordinate cartesiane geocentriche nei due sistemi. Si passa, quindi, da un sistema cartesiano nello spazio ad un altra terna cartesiana, traslata e diversamente orientata rispetto alla prima (con eventuali variazioni di scala e distorsioni). La figura 6 dà un'idea visiva della trasformazione, mostrando i due datum, ciascuno con la propria terna cartesiana e il proprio ellissoide associato.

La procedura di trasformazione più frequentemente utilizzata, conosciuta come **trasformazione di HELMERT**, è un caso particolare di trasformazione affine consistente in una rototraslazione nello spazio, con un fattore di scala. La forma della trasformazione di Helmert è la seguente:

$$\mathbf{X_2} = \mathbf{X_0} + (1 + k)\, \mathbf{R}\, \mathbf{X_1} \qquad (14)$$

nella quale $\mathbf{X_0}$ è un vettore comprendente i tre parametri di traslazione X_0, Y_0, Z_0:

$$\mathbf{X_0} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

mentre $\mathbf{R}$ è la matrice di rotazione, definita in funzione di tre parametri di rotazione R_x, R_y, R_z (rotazioni attorno a ciascuno dei tre assi):

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos R_z & \sin R_z & 0 \\ -\sin R_z & \cos R_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos R_y & 0 & -\sin R_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R_y & 0 & \cos R_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_x & \sin R_x \\ 0 & -\sin R_x & \cos R_x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos R_y \cos R_z & \cos R_x \sin R_z + \sin R_x \sin R_y \cos R_z & \sin R_x \sin R_z - \cos R_x \sin R_y \cos R_z \\ -\cos R_y \sin R_z & \cos R_x \cos R_z - \sin R_x \sin R_y \sin R_z & \sin R_x \cos R_z + \cos R_x \sin R_y \sin R_z \\ \sin R_y & -\sin R_x \cos R_y & \cos R_x \cos R_y \end{pmatrix}$$

La matrice di rotazione si ottiene dalla sovrapposizione degli effetti delle tre rotazioni successive R_z , R_y , R_x (in quest'ordine) che deve compiere la terna cartesiana del sistema 1, rispettivamente attorno agli assi Z_1, Y_1, X_1, per divenire parallela alla terna del sistema 2; le rotazioni sono considerate positive se antiorarie per un osservatore il cui verso piedi-testa coincida con quello dell'asse.

Per la stima dei parametri (v. oltre) è necessario linearizzare la (14); a tale scopo è sufficiente sostituire all'espressione generale della matrice **R** quella linearizzata valida per piccole rotazioni, che mantiene la stessa forma qualunque sia l'ordine in cui avvengono le tre rotazioni:

$$\mathbf{R_L} = \begin{pmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{pmatrix}$$

Le rotazioni tra gli assi di due terne geocentriche sono effettivamente molto piccole; l'espressione linearizzata può quindi essere impiegata anche per *eseguire* la trasformazione di datum (una volta determinati i parametri), introducendo un'approssimazione inferiore a quella dovuta alle altre cause di incertezza. Si ha così il vantaggio di svincolarsi dalla convenzione relativa all'ordine in cui avvengono le rotazioni.

Il **fattore di scala** *k* viene inserito per tener conto delle differenze di scala che inevitabilmente caratterizzano due diversi datum (originati da diversi set di misure, spesso eseguite in periodi storici molto diversi e con strumentazioni di caratteristiche differenti).

I parametri da cui dipende la trasformazione sono quindi **sette** (tre traslazioni, tre rotazioni e un fattore di scala): la trasformazione di Helmert è pertanto detta comunemente anche "<u>trasformazione a sette parametri</u>".

Alcune osservazioni sulla trasformazione di Helmert:

- Le tre componenti di traslazione X_0, Y_0, Z_0 sono le coordinate cartesiane nel sistema 2 dell'origine del sistema 1.
- Le convenzioni di segno di cui sopra meritano particolare attenzione dato che non tutti i software di trasformazione adottano le stesse, anche se quelle sopra riportate sono le più diffuse, accreditate dai più importanti testi sul GPS e utilizzate per i parametri IGM 95.
- La trasformazione di Helmert non comporta deformazioni all'infuori del fattore di scala, uniforme in tutte le direzioni. Il rilievo originario non viene quindi alterato in modo irreversibile: se necessario, il fattore di scala può essere eliminato facilmente applicandolo all'inverso.

Per carte a piccola scala, o per calcoli approssimati e speditivi, si possono utilizzare alcune trasformazioni affini ancora più semplici ottenibili come casi particolari della (14):

- trasformazione a **sei parametri**, cioè rototraslazione rigida, senza fattore di scala (k = 0); non introduce alcuna deformazione nel rilievo inserito in un datum preesistente, ma solo una variazione di orientamento;
- trasformazione a **tre** o a **quattro parametri**, cioè traslazione semplice o con fattore di scala.

Restando nell'ambito della trasformazione di Helmert, che è di gran lunga la più diffusa, **i sette parametri vengono stimati ai minimi quadrati sulla base della conoscenza delle coordinate in entrambi i sistemi per un congruo numero di punti**. Ogni punto "tridimensionale" (cioè <u>planimetrico e altimetrico</u>) noto in entrambi i sistemi permette di scrivere, mediante le (14), tre equazioni (una per coordinata) nelle quali sono incogniti i sette parametri. E' quindi necessario disporre di <u>almeno tre punti "tridimensionali" comuni ai due sistemi</u>; in pratica se ne utilizza un numero maggiore, per controllare l'affidabilità della trasformazione attraverso i *residui* sulle coordinate dei punti noti.

Se le reti di appoggio dei due sistemi geodetici fossero prive di errori, l'algoritmo di Helmert realizzerebbe una trasformazione praticamente "perfetta", con residui nulli. Nella realtà, tutte le reti geodetiche che realizzano i datum (in particolare quelle di vecchia data) sono caratterizzate da deformazioni di vario tipo dovute ad errori di misura e di calcolo, per cui la stima dei parametri comporta necessariamente dei residui e <u>la trasformazione risulta sempre approssimata</u>.

Una variante della trasformazione di Helmert consiste nell'utilizzare le **<u>formule di MOLODENSKIJ</u>**, che si basano sempre, concettualmente, sulla rototraslazione a sette parametri (in forma linearizzata), ma sono scritte in coordinate geografiche, e realizzano quindi il passaggio in modo più immediato:

$$d\varphi = \frac{\sin\omega}{(N+H)\cos\varphi} dx_0 - \frac{\cos\omega}{(N+H)\cos\varphi} dy_0 - \frac{(1-\alpha)^2 N + H}{N+H} tg\varphi(\cos\omega dRx + \sin\omega dRy) + dRz$$

$$d\omega = \frac{\sin\varphi\cos\omega}{\rho+H} dx_0 + \frac{\sin\varphi\sin\omega}{\rho+H} dy_0 - \frac{\cos\varphi}{\rho+H} + \frac{\alpha^2 / N + H}{N+H}(\sin\omega dRx - \cos\omega dRy) +$$
$$+ \frac{\left[1-(1-\alpha)^2\right]N}{\rho+H}\cos\varphi\sin\varphi dk + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho+H}\left\{\left[1-(1-\alpha)^2\right]N\frac{da}{a} + \left[\rho + (1-\alpha)^2 N\right]\frac{d\alpha}{1-\alpha}\right\}$$

$$dH = \cos\varphi\cos\omega dx_0 - \cos\varphi\sin\omega dy_0 - \sin\varphi dz_0 + \left[1-(1-\alpha)^2\right]N\sin\varphi\cos\varphi(\sin\omega dRx - \cos\omega dRy) +$$
$$-\left(\frac{a^2}{N+H}\right)dk - \frac{a}{N} - da + (1-\alpha)^2 N\sin^2\varphi\frac{d\alpha}{1-\alpha}$$

In tali espressioni dx_0, dy_0, dz_0, dRx, dRy, dRz, dk rappresentano i sette parametri di trasformazione (la d indica che si tratta in questo caso di valori elementari, in quanto le formule di Molodenskij derivano da una linearizzazione del modello), $d\alpha$ e da sono le differenze rispettivamente tra gli schiacciamenti ed i semiassi dei due ellissoidi e $d\varphi$, $d\omega$, dH sono gli incrementi da sommare alle coordinate (φ, ω, H) di un punto nel primo sistema per riferirlo al secondo.

Come accennato, il fatto che le quantità $d\varphi$, $d\omega$, dH compaiano ciascuna in una singola equazione consente di utilizzare i dati planimetrici separatamente da quelli altimetrici, il che è utile, ad esempio, quando per alcuni dei vertici di inquadramento non risulta attendibile il valore della quota ellissoidica; in tal caso essi potranno ugualmente concorrere alla stima dei parametri con le prime due equazioni. Il maggior vantaggio delle espressioni di Molodenskij sta quindi nel poter utilizzare, ai fini del calcolo dei sette parametri, anche punti noti solo in planimetria (ad es. vertici di rete catastale) o solo in quota (ad es. capisaldi di livellazione).

Ai fini della stima dei parametri, è buona regola che **i punti comuni ai due sistemi siano ben distribuiti nell'area interessata;** inoltre, **un numero adeguato di punti comuni deve essere esterno al perimetro dell'area stessa, in modo che la trasformazione derivi da una interpolazione piuttosto che da una estrapolazione**.

4.3. Applicazioni pratiche della trasformazione di Helmert in Italia

a) Passaggio da WGS84 a Roma 40

È il problema più ricorrente quando si voglia inserire un rilievo GPS (calcolato nel datum WGS84) in una cartografia preesistente georeferenziata in Roma 40. Per la risoluzione di questo fondamentale problema si è passati in Italia attraverso fasi successive:

Nei primi anni successivi all'introduzione del GPS nei rilievi (ca. 1985), si è proceduto in genere stimando **localmente** i parametri della trasformazione per l'area del rilievo sulla base delle coordinate di punti "doppi", con il metodo generale descritto al paragrafo precedente. In pratica, era necessario per ogni rilievo occupare con il GPS un certo numero di vertici situati nella zona e noti nel "vecchio" sistema Roma 40. La scelta di tali punti era però arbitraria e operatori diversi pervenivano a risultati diversi (anche se non di tanto) pur lavorando in una stessa zona.

L’Istituto Geografico Militare Italiano – IGM – , nel rilasciare verso la fine degli anni ’90 i risultati della rete IGM95, calcolò per tutta l’Italia i valori dei 7 parametri della trasformazione di Helmert da WGS84 aRoma 40. Per ogni vertice della rete venne stimato un **set di parametri valido nell’intorno di tale vertice**, sulla base delle coordinate note dei punti circostanti, e tale set venne inserito nella monografia del vertice stesso. In questo modo non era più necessario occupare con stazioni GPS i vertici della vecchia rete, ma solo alcuni (teoricamente anche solo uno) vertici IGM95, molto più agevoli per l’accesso e per stazionarvi con un ricevitore GPS. Inoltre la soluzione della trasformazione di datum non era più affidata a scelte dell’operatore ma si basava su parametri noti a priori. Restava però un problema: i parametri **variavano da punto a punto** (ovviamente essendo stimati localmente). Per ovviare a questo, e quindi per evitare possibili ambiguità, si adottava il criterio di utilizzare i parametri del vertice IGM95 **più vicino** all’area del rilievo. Se però l’area era vasta, si dovevano adottare i parametri di più vertici IGM95, sempre affidandosi al criterio della minima distanza.

Per semplificare la procedura da parte degli operatori ed evitare ogni possibile ambiguità, l’IGM ha proceduto successivamente al calcolo e alla pubblicazione di “**grigliati**” di trasformazione che riportano le **variazioni di latitudine e longitudine** tra WGS84 e Roma 40 in funzione delle coordinate geografiche del punto considerato. Le variazioni sono calcolate per incrementi finiti di latitudine e longitudine, in sostanza quindi ne vengono dati i valori sui nodi di un **grigliato** a maglia quadrangolare. Per calcolare le variazioni da attribuire a un generico punto rilevato, tale grigliato bidimensionale deve essere **interpolato**, e per farlo in maniera univoca l’IGM fornisce un programma di interpolazione, il software VERTO. Un analogo grigliato è stato realizzato anche per l’altimetria, basandosi sul modello di geoide ITALGEO99 e sulla rete di livellazione nazionale.

La figura 7 riporta la schermata principale del software VERTO (versione 1) relativa alla trasformazione di datum da WGS84 a Roma 40 per la stazione permanente GPS/GNSS di Terni (UNTR) dell’Università di Perugia. I grigliati utilizzati sono quelli relativi al foglio n. 335 della carta d’Italia IGM alla scala 1:50.000, che comprende il punto in oggetto. Lo stesso software VERTO ha effettuato anche la trasformazione relativa alla quota, utilizzando il grigliato ricavato dal modello geoidico ITALGEO99 sviluppato dal Politecnico di Milano per l’IGM.

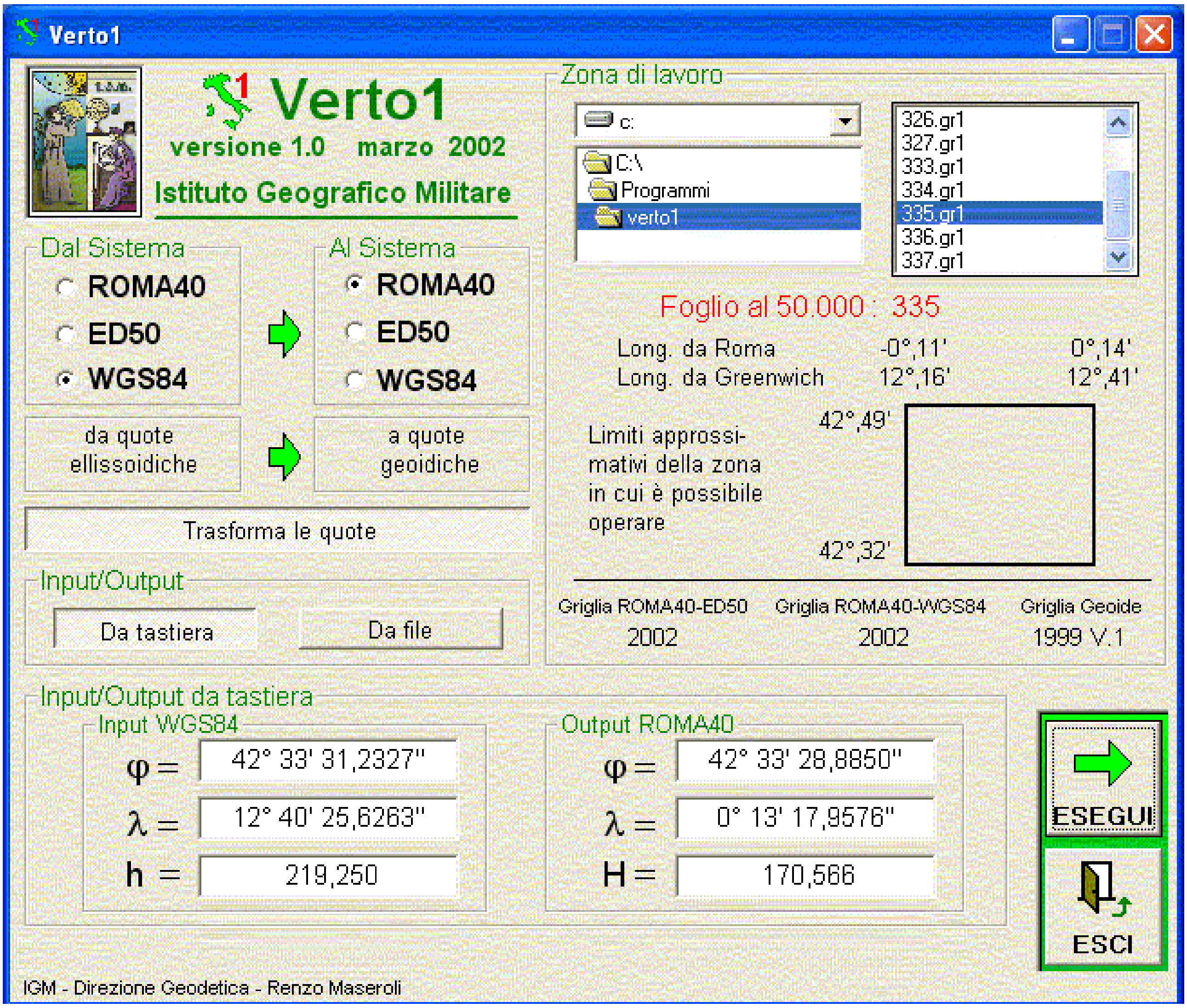

Fig. 7: Schermata del software VERTO1, trasformazione di datum WGS84 – Roma40 per la stazione permanente UNTR.

4.4. Procedimenti semplificati validi localmente

Per problemi di trasformazione locali, che interessino zone non troppo estese, può essere in certi casi vantaggioso ricorrere, anziché alla trasformazione di Helmert, a procedimenti più semplici.

Ad esempio, un procedimento utilizzabile per la sola planimetria consiste nell'effettuare il passaggio diretto da coordinate piane cartografiche nel primo datum a coordinate piane cartografiche nel secondo datum.

A tale scopo può essere impiegata una trasformazione affine nel piano:

$$N_2 = a_1 N_1 + b_1 E_1 + c_1$$

$$E_2 = a_2 N_1 + b_2 E_1 + c_2 \tag{16}$$

che comporta la stima di sei parametri, da effettuare sempre ai minimi quadrati. Sono quindi necessari un minimo di tre punti comuni (3 punti x 2 coordinate = 6 equazioni).

La trasformazione affine nel piano, come quella tridimensionale vista in precedenza, è in grado di modellare molte distorsioni locali delle reti, ma introduce a sua volta effetti distorsivi che in molti casi si vogliono evitare. Si può allora utilizzare, se i residui che si ottengono sono accettabili, una rototraslazione piana, semplice o con fattore di scala:

$$\mathbf{N_2} = \mathbf{N_0} + (1 + k)\,\mathbf{R}\,\mathbf{N_1} \tag{17}$$

dove **N** rappresenta il vettore delle coordinate piane (N, E) , mentre **R** e k sono rispettivamente la matrice di rotazione nel piano e il fattore di scala. I parametri da stimare, in questo caso, scendono a quattro (due traslazioni, una rotazione e un fattore di scala) per cui il numero minimo di punti comuni si riduce a due.

Va ancora sottolineato che trasformazioni di questo tipo possono ritenersi valide solo per zone molto limitate (il limite dipende dall'entità delle approssimazioni accettabili, legate alla scala della carta).

Un altro svantaggio di questo tipo di procedure locali è che esse risultano **soggettive** in quanto la stima dei parametri è legata alla scelta dei punti “doppi” fatta dall’operatore in ambito locale.

Per zone più estese, si possono utilizzare espressioni più complesse (ad esempio polinomiali anziché lineari), per tener conto appropriatamente dei già citati effetti distorsivi e della differenza di curvatura e orientamento delle superfici ellissoidiche nei due datum.

Un esempio di trasformazione di quest’ultimo tipo è quella calcolata da P. Bencini (all’epoca direttore della sezione Geodetica dell’IGM) per passare dalle coordinate Gauss-Boaga (Datum Roma 40) alle coordinate U.T.M. (Datum ED 50) e viceversa. Il procedimento è basato su formule polinomiali incomplete del quarto grado, con 18 coefficienti da stimare. La stima di tali coefficienti è stata effettuata dividendo l'Italia in otto zone, e calcolando un set di coefficienti per ciascuna di tali zone. L'approssimazione che si ottiene con l'uso di queste formule è dell'ordine del metro, difficilmente superabile, nel caso in oggetto, con altri procedimenti (ivi compresa la trasformazione di Helmert). Queste espressioni sono state utilizzate dall'IGM, ad esempio, per il calcolo delle coordinate Gauss-Boaga dei vertici degli elementi delle carte tecniche regionali.

Simili a queste sono altre espressioni polinomiali in uso all'IGM per trasformare coordinate geografiche dei datum prebellici (ellissoide di Bessel orientato a Genova o a Castanea delle Furie) in coordinate geografiche nel sistema geodetico nazionale (M. Mario 1940). Descritte ad es. da Antongiovanni (1985), sono particolarmente utili per effettuare la trasformazione di datum tra sistema nazionale e sistemi catastali.

4.5. Altri procedimenti geodetici di trasformazione

Alcune procedure di trasformazione di datum, utilizzabili in genere solo ai fini della planimetria, si basano sulla determinazione di elementi geodetici (ad es. lunghezza e azimut di particolari linee geodetiche) in uno dei due datum, e nel loro "trasporto" sull'altro datum mediante, ad esempio, una correzione di orientamento e di scala.

5. ESEMPI DI TRASFORMAZIONI RICORRENTI

La figura 8 rappresenta graficamente, in sintesi, le trasformazioni di coordinate e di datum più ricorrenti con riferimento alla situazione attuale della geodesia e cartografia italiana. Sono rappresentati schematicamente i principali datum geodetici in uso in Italia, e i tipi di coordinate ad essi associate. Con linea continua sono rappresentate le trasformazioni di coordinate nell'ambito di uno stesso datum; con linea tratteggiata le trasformazioni di datum di tipo affine, e con linea a tratto e punto alcune trasformazioni di datum basate su espressioni di tipo empirico.

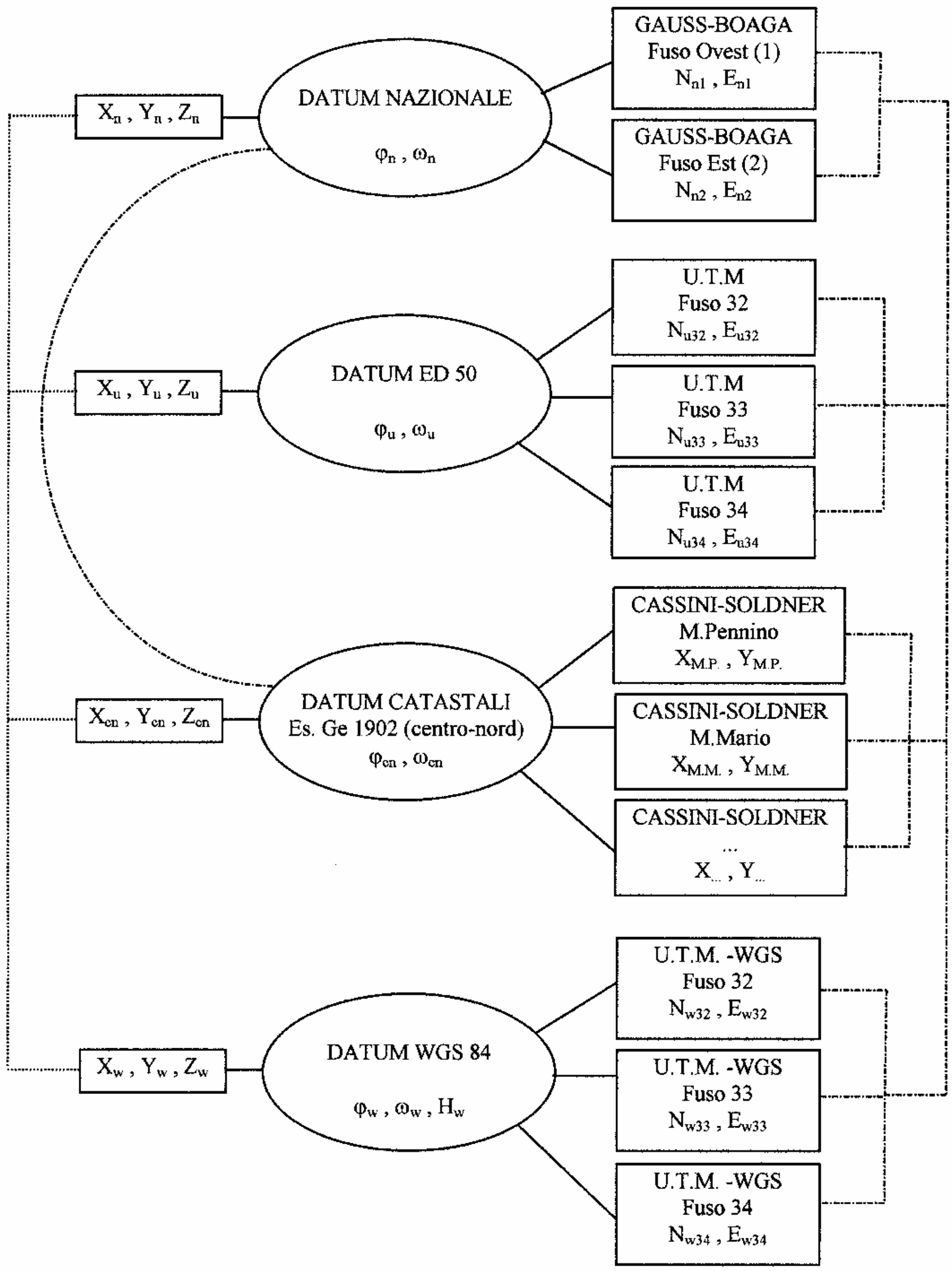

Fig. 8: Riepilogo delle principali trasformazioni di coordinate e di datum della cartografia italiana.

Legenda:

——— Trasformazioni di coordinate

········ Trasformazioni di datum (Helmert)

-·-·-·-· Trasformazioni di datum (proc. semplificati)