

# COORDINATE E DATUM

Viene detta **GEOREFERENZIAZIONE** la determinazione della posizione di un punto appartenente alla superficie terrestre (o situato in prossimità di essa)

La posizione viene espressa mediante un opportuno sistema di **COORDINATE** riferite ad un opportuno **DATUM** o **SISTEMA GEODETICO DI RIFERIMENTO**

La definizione di **DATUM GEODETICO** (v. approfondimenti nelle pagine successive) consiste essenzialmente nella scelta di un ellissoide di parametri assegnati orientato in modo opportuno rispetto alla Terra

E' necessario definire i diversi tipi di **COORDINATE** che possono essere utilizzate in geodesia, ed i diversi **DATUM** utilizzati per scopi geodetici e cartografici

Nella geodesia moderna è molto spesso necessario saper eseguire **TRASFORMAZIONI**:

- **di coordinate**: passare da un tipo di coordinate ad un altro nell'ambito di un assegnato datum; si effettuano con algoritmi analitico-geometrici che **non comportano perdita di precisione del dato iniziale**

- **di datum**: passare da un datum ad un altro; si effettuano mediante parametri la cui stima è **sempre approssimata in quanto risente degli errori di misura**

# SISTEMI DI COORDINATE

Supponendo assegnato un DATUM geodetico, ovvero un ellissoide di riferimento, su di esso è possibile esprimere la posizione di un punto mediante diversi sistemi di coordinate

I sistemi di coordinate più utilizzati in geodesia e cartografia sono i seguenti:

- 1) Coordinate geografiche ellissoidiche
- 2) Coordinate cartesiane geocentriche o "ellissocentriche"
- 3) Coordinate cartesiane locali (euleriane)
- 4) Coordinate geodetiche polari
- 5) Coordinate geodetiche ortogonali
- 6) Coordinate piane cartografiche (equivalenti alle geografiche)

A seconda dei tipi, le coordinate possono esprimere una posizione solo **PLANIMETRICA** (2D, coppia di coordinate) o **TRIDIMENSIONALE** (3D, terna di coordinate, che forniscono una georeferenziazione plano-altimetrica)

E' necessario:

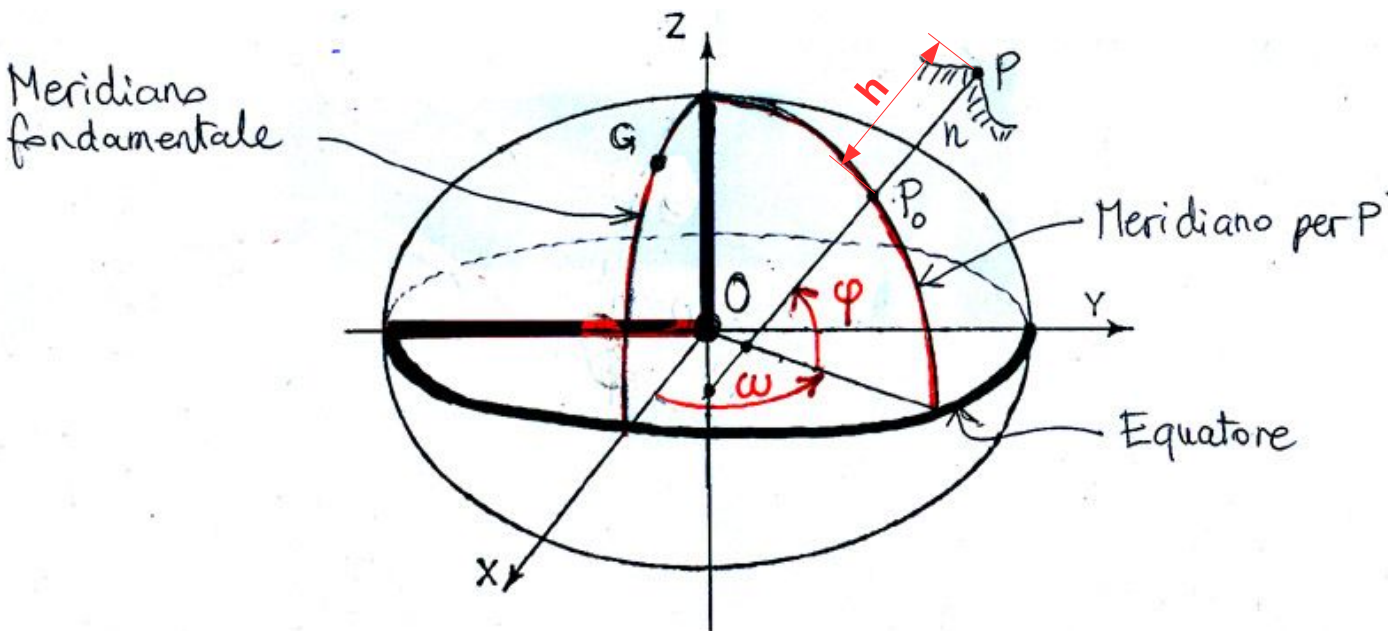
- conoscere le definizioni e gli ambiti di applicazione dei diversi sistemi di coordinate
- essere in grado di eseguire le trasformazioni da un sistema ad un altro

# 1 - Coordinate Geografiche Ellissoidiche

Sono state già definite trattando di geometria dell'ellissoide terrestre

**Latitudine  $\varphi$**  e **Longitudine  $\omega$**  da sole forniscono solo una posizione PLANIMETRICA (posizione della proiezione  $P_0$  del punto sulla superficie dell'ellissoide)

Se ad esse si associa la **Altezza Ellissoidica  $h$**  (distanza del punto  $P$  dall'ellissoide misurata lungo la normale ellissoidica) si ottiene una terna di coordinate ( **$\varphi, \omega, h$** ) che definisce una posizione 3D cioè PLANOALTIMETRICA



**UTILIZZO** delle coordinate geografiche : tutte le applicazioni della geodesia e cartografia (sono le coordinate più comuni)

N.B. L'altezza ellissoidica è utilizzata in pratica solo nella geodesia satellitare (GPS e sistemi analoghi)

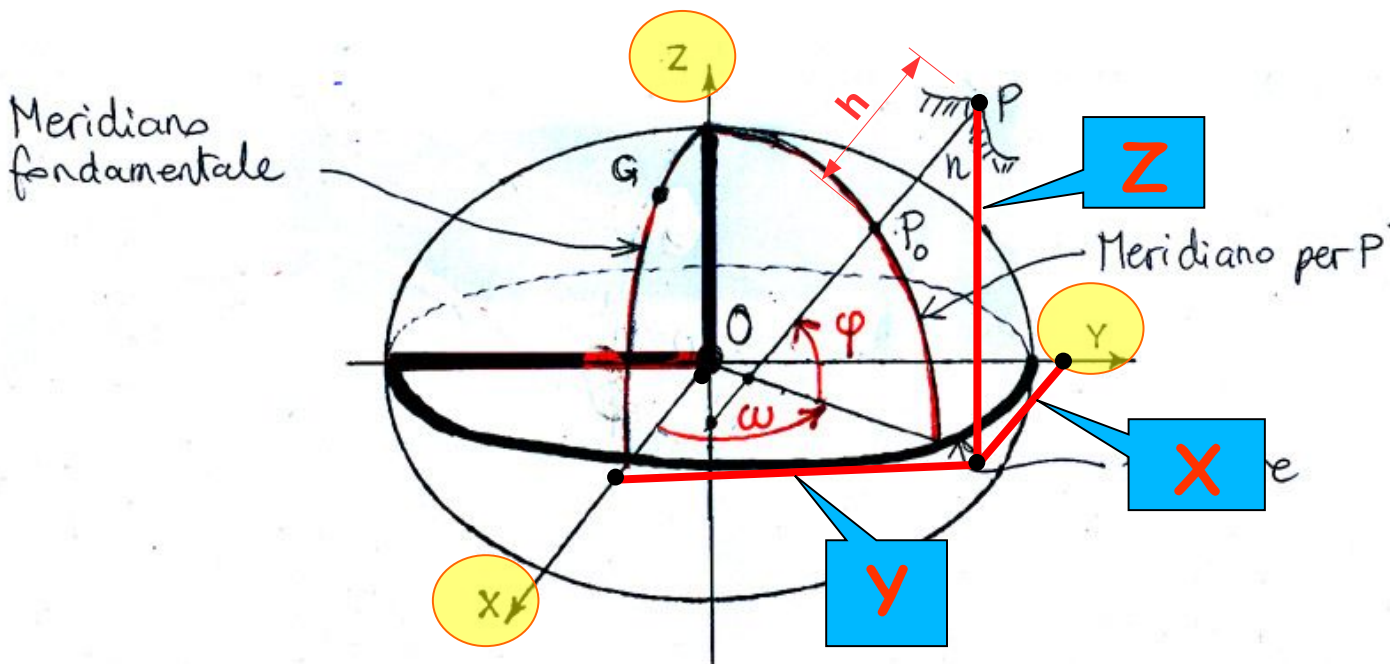
L'altimetria nelle applicazioni ingegneristiche e cartografiche è descritta dalla **Quota Ortometrica o Geoidica  $H$** , riferita al geoide

## 2 - Coordinate Cartesianhe Geocentriche (o Ellissocentriche)

Sono coordinate cartesiane  $(X, Y, Z)$  riferite a una **terna geocentrica** avente:

- *Origine* nel centro di massa della terra
- *Asse Z* diretto secondo l'asse polare medio terrestre
- *Assi X e Y* sul piano equatoriale (perpendicolare all'asse Z) con X disposto secondo il meridiano fondamentale e Y disposto in modo da formare una terna della mano destra

La terna di coordinate  $(X, Y, Z)$  definisce una posizione 3D equivalente a una posizione planoaltimetrica



Quando l'origine della terna cartesiana coincide con il centro dell'ellissoide, vengono anche dette **Coordinate Cartesianhe Ellissocentriche** (definizione generalizzabile agli *ellissoidi non geocentrici* come quelli dei datum locali)

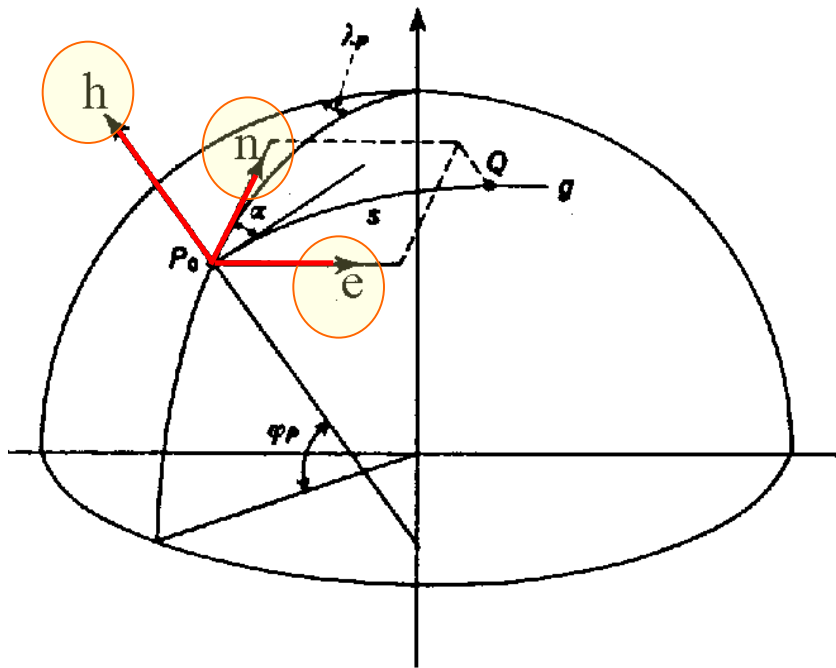
**UTILIZZO:** geodesia satellitare, trasformazioni di datum

### 3 - Coordinate Cartesianhe Locali (o Euleriane)

Sono le coordinate cartesiane  $(e, n, h)$  riferite a una **terna euleriana** avente:

- *Origine* in un punto  $P_0$  dell'ellissoide
- *Asse  $h$*  diretto secondo la normale ellissoidica per  $P_0$  (N.B.:  $h$  non coincide con l'altezza ellissoidica ma è la distanza del punto dal piano  $ne$ )
- *Assi  $e$  ed  $n$*  sul piano tangente all'ellissoide in  $P_0$  con  $n$  diretto secondo la tangente al meridiano verso N ed  $e$  secondo la tangente al parallelo verso E

La terna di coordinate  $(e, n, h)$  definisce una posizione 3D equivalente a una posizione planoaltimetrica

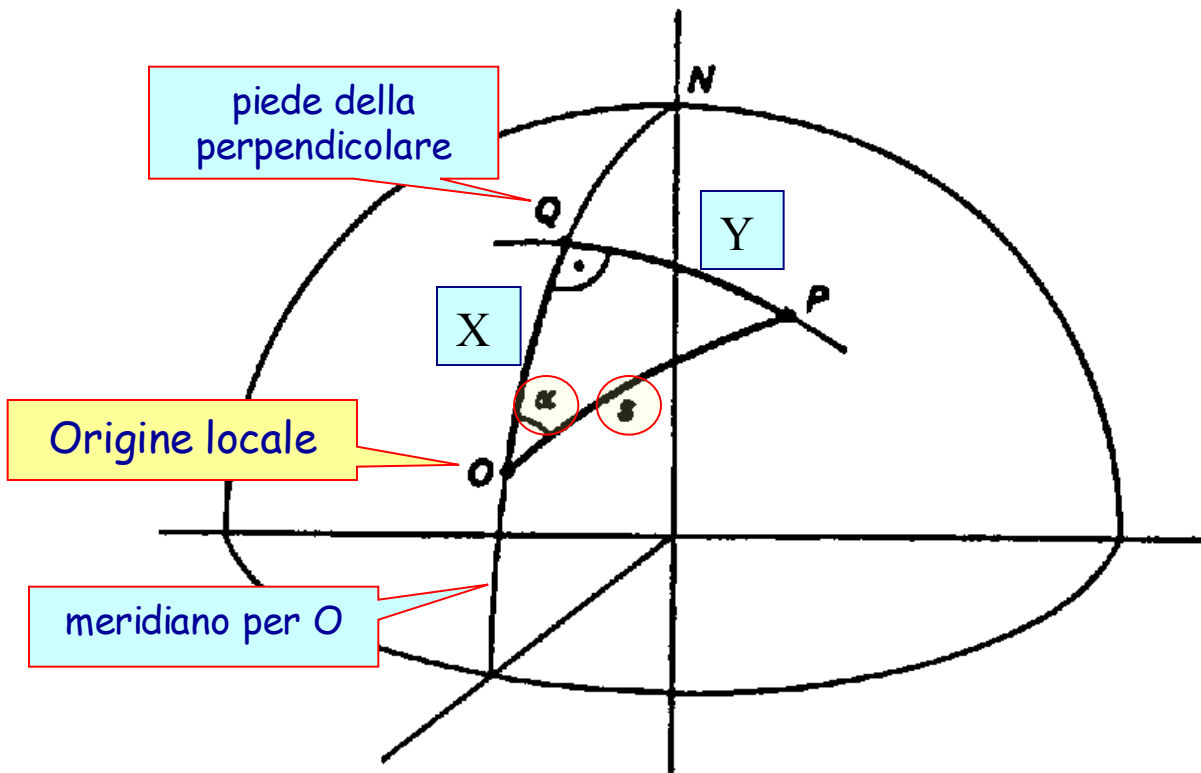


**UTILIZZO:** geodesia satellitare, rilievi locali

Per loro natura queste coordinate sono adatte solo a un utilizzo locale in ambiti di qualche centinaio di km al massimo

## 4 - Coordinate Geodetiche Polari

## 5 - Coordinate Geodetiche Ortogonali



### Coordinate Geodetiche Polari ( $s, \alpha$ )

$s$  distanza polare = lunghezza dell'arco di geodetica  $OP$

$\alpha$  azimuth = azimuth in  $O$  della geodetica  $OP$

### Coordinate Geodetiche Ortogonali o Rettangolari ( $X, Y$ )

$X$  = lunghezza dell'arco di meridiano  $OQ$

$Y$  = lunghezza dell'arco di geodetica  $QP$  ortogonale in  $Q$  al meridiano per  $O$

La coppia di coordinate ( $s, \alpha$ ) oppure ( $X, Y$ ) definisce una posizione 2D (solo planimetrica)

**UTILIZZO:** calcoli geodetici locali, reti geodetiche classiche ( $s, \alpha$ ), Coordinate cartografia catastale ( $X, Y$ )

# DATUM GEODETICI

Si definisce **DATUM GEODETICO** un sistema di riferimento che permette di esprimere in termini matematici la posizione di punti della superficie fisica della Terra o prossimi ad essa (cioè permette di **GEOREFERENZIARE** punti e oggetti)

E' importante chiarire che:

- La definizione di un datum è sempre **CONVENZIONALE**  
- Ogni datum si **REALIZZA** attraverso l'attribuzione di determinati valori di coordinate a un insieme finito di punti *materializzati* sulla superficie terrestre (che costituiscono una **RETE DI INQUADRAMENTO**). Le coordinate dei vertici della rete di inquadramento vengono ottenute da misure e calcoli geodetici.

- A ogni **DATUM** è associata una **RETE** -

Nelle applicazioni geodetiche e topografiche si utilizzano sistemi di riferimento **SOLIDALI ALLA TERRA** o **EARTH-FIXED** (*non inerziali*),

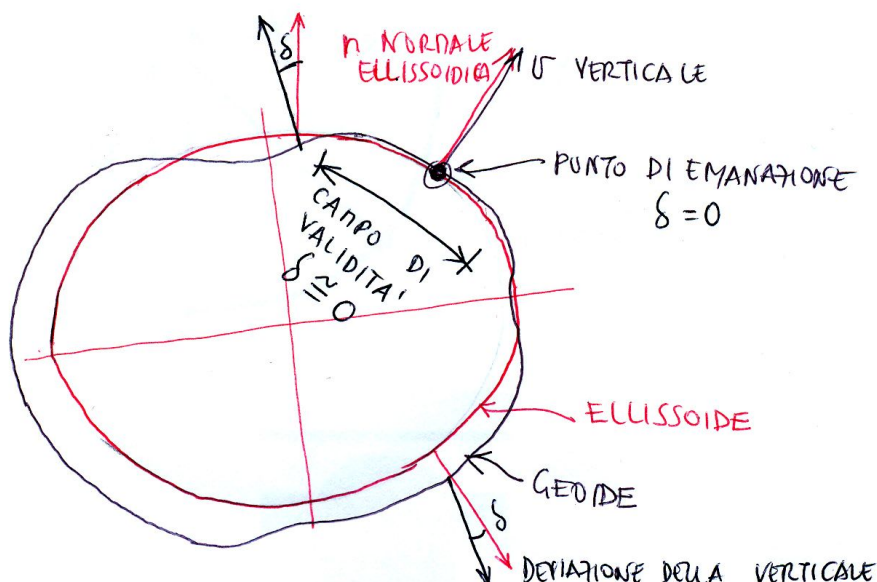
in astronomia si considerano sistemi *inerziali* - ad es. solidali al sole o alle stelle fisse (nei quali la Terra è in movimento)

I datum geodetici vanno distinti tra:

- **TRIDIMENSIONALI** (es. WGS84, geodesia satellitare)
- **PLANIMETRICI** (**HORIZONTAL DATUM** - es. Roma40)
- **ALTIMETRICI** (**VERTICAL DATUM**, es. datum altimetrico Italia continentale)

# GEODESIA CLASSICA: DATUM LOCALI

Nella Geodesia classica (basata su misure a terra) la definizione di datum si basa sul concetto di superficie di riferimento e consiste nel definire un **ELLISSOIDE ORIENTATO LOCALMENTE**



L'orientamento dell'ellissoide si effettua imponendo che in un punto centrale per l'area di lavoro detto **PUNTO DI EMANAZIONE** valgano le seguenti condizioni:

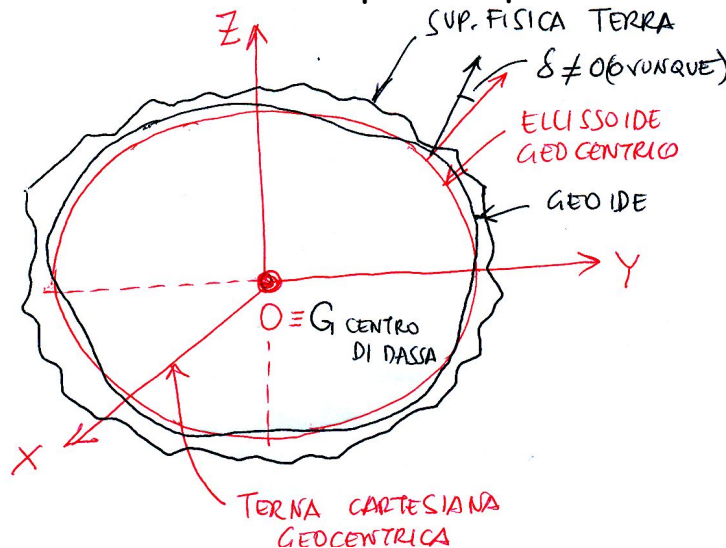
3. *la normale ellissoidica coincida con la verticale (deviazione della verticale  $\delta = 0$ );*  
$$\varphi_{ell} = \varphi_{astro} \quad , \quad \omega_{ell} = \omega_{astro}$$
2. *la direzione del meridiano ellissoidico coincida con quella del meridiano astronomico;*  
$$\alpha_{ell} = \alpha_{astro}$$
3. *la quota ellissoidica coincida con quella ortometrica.  $n = 0$*

In questo modo **la deviazione della verticale risulta trascurabile** per tutto il campo di applicazione del datum per cui **le misure (angoli e distanze) fatte con strumenti orientati secondo la verticale possono essere proiettate sull'ellissoide**



# GEODESIA SATELLITARE: DATUM GLOBALI

Nella Geodesia moderna (basata su misure satellitari) la definizione di datum si basa su una **TERNA CARTESIANA GEOCENTRICA solidale alla Terra** (ECEF = Earth Centered Earth Fixed) alla quale si associa poi un **ELLISSOIDE GEOCENTRICO** avente asse polare coincidente con l'asse Z e assi X ed Y sul piano equatoriale



L'asse Z è disposto secondo l'asse di rotazione terrestre (convenzionale), l'asse X secondo il piano del meridiano origine, l'asse Y completa una terna destrorsa

Viene applicato a tutta la Terra (datum globale)

La deviazione della verticale non è quasi mai trascurabile ma questi datum sono pensati in funzione delle misure satellitari, non più di quelle terrestri

Esiste comunque una **rete associata** (ad es. le reti di stazioni permanenti IGS-EUREF o la rete IGM95)

# DATUM ALTIMETRICI

Sia nella geodesia classica che in quella satellitare i **DATUM ALTIMETRICI** o **VERTICAL DATUM**, sistemi di riferimento in cui sono definite le **QUOTE ORTOMETRICHE**, necessitano di una definizione separata da quella dei datum per la planimetria

La definizione di un DATUM ALTIMETRICO richiede essenzialmente che siano individuati:

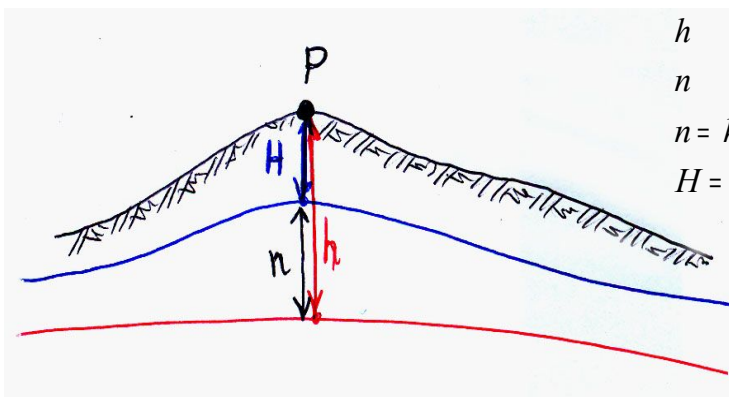
- una **ORIGINE** ("zero") delle quote (collegata a un *mareografo*)
- una **RETE ALTIMETRICA** (di *livellazione*) associata al datum, che "porti" le quote su tutto il territorio



Con l'avvento dei sistemi satellitari è inoltre necessario

- un **MODELLO DI GEOIDE**  $n = n(\varphi, \omega)$   
*modelli globali* approssimati validi per tutta la Terra  
*modelli locali* più accurati validi localmente  
si ricavano tenendo conto sia di misure gravimetriche sia satellitari sia di livellazione

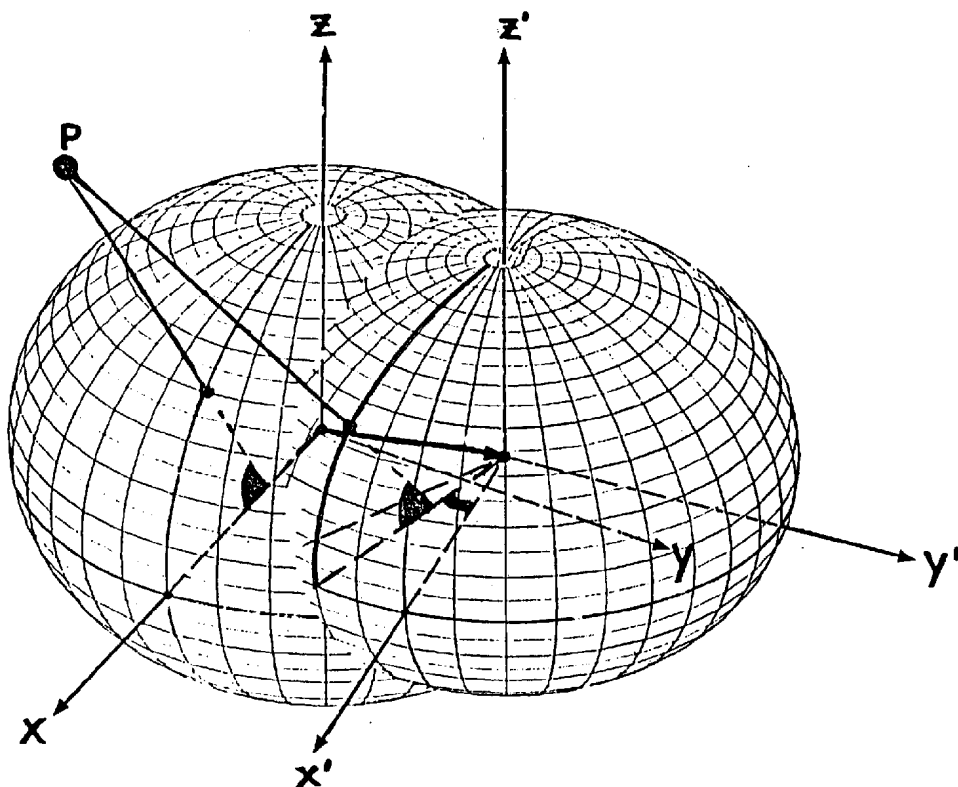
$H$  altezza ortometrica (o geoidica)  
 $h$  altezza ellissoidica  
 $n$  ondulazione geoidica  
 $n = h - H$  (GPS per det. modello geoidico)  
 $H = h - n$  I equazione della livellazione GPS



Superficie Fisica  
Geoide  
Ellissoide

# TRASFORMAZIONI DI DATUM

Uno stesso punto, rispetto a due diversi datum, ha coordinate diverse, come si deduce in maniera intuitiva dalla seguente figura (da Beutler):



Tali differenze sono in genere di entità notevole, anche di centinaia di metri, per cui è per una corretta georeferenziazione è **indispensabile** specificare esattamente il datum a cui si riferiscono le coordinate date

A titolo di esempio si riportano le coordinate di uno stesso punto (IGM95 Castiglion del Lago) in tre diversi datum:

Roma 40:	$\varphi = 43^{\circ} 07' 37,250''$	$\omega = -0^{\circ} 23' 47,323''$ E	M.Mario = $12^{\circ} 03' 21,077''$ E	Greenwich
WGS 84:	$\varphi = 43^{\circ} 07' 39,584''$	$\omega = 12^{\circ} 03' 20,248''$ E	Greenwich	
Bessel Genova:	$\varphi = 43^{\circ} 07' 36,766''$	$\omega = 12^{\circ} 03' 19,399''$ E	Greenwich	

Ricordiamo che considerando l'entità dei raggi di curvatura alle nostre latitudini si ottiene 1" = circa 30 m (latitudine) , circa 20 m (longitudine)

# TRASFORMAZIONE DI HELMERT

Il metodo più utilizzato nella geodesia moderna per effettuare una trasformazione di datum consiste nell'eseguire una rototraslazione nello spazio con fattore di scala (**Trasformazione di Helmert**) operando sulle coordinate cartesiane geocentriche:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_0 + (1 + k) \mathbf{R} \mathbf{X}_1$$

nella quale:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad \text{coordinate del punto nei due diversi datum}$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad \text{vettore traslazione comprendente 3 parametri di traslazione } X_0, Y_0, Z_0$$

$\mathbf{R}$  è la **matrice di rotazione** nello spazio tra i due sistemi, funzione di **3 parametri** di rotazione  $R_x, R_y, R_z$ :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos R_z & \sin R_z & 0 \\ -\sin R_z & \cos R_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos R_y & 0 & -\sin R_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R_y & 0 & \cos R_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_x & \sin R_x \\ 0 & -\sin R_x & \cos R_x \end{pmatrix} =$$

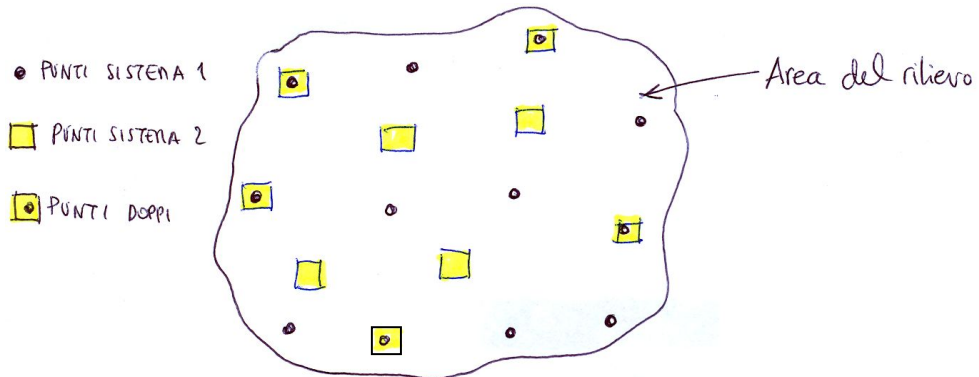
$$= \begin{pmatrix} \cos R_y \cos R_z & \cos R_x \sin R_z + \sin R_x \sin R_y \cos R_z & \sin R_x \sin R_z - \cos R_x \sin R_y \cos R_z \\ -\cos R_y \sin R_z & \cos R_x \cos R_z - \sin R_x \sin R_y \sin R_z & \sin R_x \cos R_z + \cos R_x \sin R_y \sin R_z \\ \sin R_y & -\sin R_x \cos R_y & \cos R_x \cos R_y \end{pmatrix}$$

$k$  è un **fattore di scala** tra i due sistemi, ulteriore parametro inserito per modellare le distorsioni dovute agli errori delle misure associate ai due sistemi

In totale si hanno **7 parametri**:  $X_0, Y_0, Z_0, R_x, R_y, R_z, k$

# Trasformazione di Helmert: stima dei parametri

I 7 parametri vengono **stimati ai minimi quadrati** sulla base di un congruo numero di **punti "doppi"** (punti per i quali sono note le coordinate in entrambi i datum)



Ogni **punto doppio 3D** (planimetrico e altimetrico) permette di scrivere **3 equazioni** (una per coordinata). E' quindi necessario disporre di **almeno 3 punti doppi 3D**; in pratica un numero maggiore, per controllare l'affidabilità della trasformazione attraverso i **residui** sulle coordinate dei punti noti

Se le **reti** di inquadramento associate ai due datum fossero prive di errori, l'algoritmo di Helmert realizzerebbe una trasformazione perfetta, con residui nulli. Nella realtà, tutte le reti geodetiche che realizzano i datum (in maggior misura quelle di vecchia data) sono caratterizzate da **deformazioni** di vario tipo dovute ad **errori di misura**, per cui la stima dei parametri comporta necessariamente dei residui e **ogni trasformazione di datum risulta sempre approssimata**

Per la stima dei parametri è necessario utilizzare la matrice di rotazione in forma **linearizzata** (valida solo per **piccole rotazioni**):

$$\mathbf{R}_L = \begin{pmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{pmatrix}$$

## Formule di Molodenskij

Una variante della trasformazione di Helmert (equivalente agli effetti pratici) consiste nell'utilizzare le **Formule di Molodenskij**, che si basano sempre su una rototraslazione a sette parametri (linearizzata), ma sono scritte in coordinate geografiche, e realizzano il passaggio in modo più immediato e indipendente per planimetria e altimetria:

$$d\varphi = \frac{\sin\omega}{(N+H)\cos\varphi} dx_0 - \frac{\cos\omega}{(N+H)\cos\varphi} dy_0 - \frac{(1-\alpha)^2 N + H}{N+H} \operatorname{tg}\varphi (\cos\omega dRx + \sin\omega dRy) + dRz$$

$$d\omega = \frac{\sin\varphi \cos\omega}{\rho + H} dx_0 + \frac{\sin\varphi \sin\omega}{\rho + H} dy_0 - \frac{\cos\varphi}{\rho + H} + \frac{\alpha^2 / N + H}{N+H} (\sin\omega dRx - \cos\omega dRy) +$$

$$+ \frac{[1 - (1-\alpha)^2]N}{\rho + H} \cos\varphi \sin\varphi dk + \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\rho + H} \left\{ [1 - (1-\alpha)^2]N \frac{da}{a} + [\rho + (1-\alpha)^2 N] \frac{d\alpha}{1-\alpha} \right\}$$

$$dH = \cos\varphi \cos\omega dx_0 - \cos\varphi \sin\omega dy_0 - \sin\varphi dz_0 + [1 - (1-\alpha)^2]N \sin\varphi \cos\varphi (\sin\omega dRx - \cos\omega dRy) +$$

$$- \left( \frac{a^2}{N+H} \right) dk - \frac{a}{N} - da + (1-\alpha)^2 N \sin^2\varphi \frac{d\alpha}{1-\alpha}$$

I 7 parametri sono scritti in termini differenziali in quanto si intendono quantità elementari (piccole)

da e dα rappresentano le variazioni del semiasse equatoriale e dello schiacciamento dal 1° al 2° ellissoide

Queste espressioni permettono di effettuare la stima dei parametri anche utilizzando punti doppi solo planimetrici o solo altimetrici