3 – MISURA DEI DISLIVELLI

3.1. DEFINIZIONI DI QUOTA E DISLIVELLO

QUOTA ORTOMETRICA E ALTEZZA ELLISSOIDICA

Si tratta di grandezze già definite nel modulo di Topografia 1.

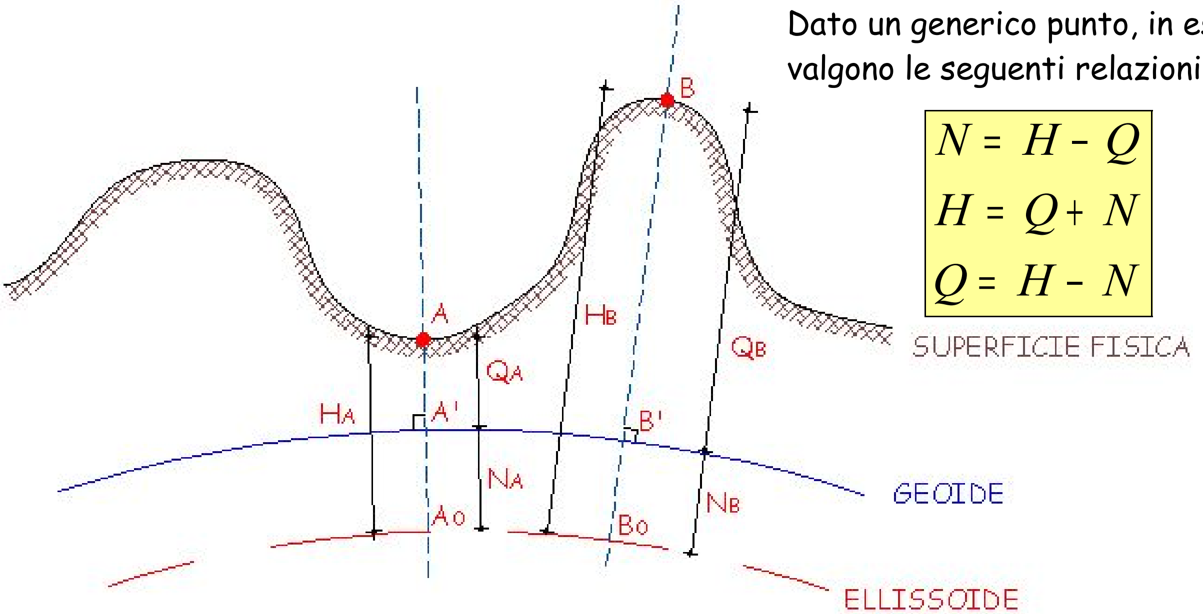
Si definisce **Quota Ortometrica** (**Q_A = AA'** o **Q_B = BB'** nella figura) di un punto la *lunghezza del tratto di linea di forza* della gravità terrestre che va dal punto (A o B) alla superficie del geoide. Se si trascura la curvatura della linea di forza, essa corrisponde alla distanza tra il punto e il geoide misurata lungo la verticale per il punto.

Si definisce **Altezza Ellissoidica** (**H_A = AA_0** o **H_B = BB_0** nella figura) di un punto, la distanza del punto dalla superficie dell'ellissoide di riferimento, misurata lungo la normale all'ellissoide stesso.

Trascurando la curvatura delle linee di forza della gravità, quota ortometrica e altezza ellissoidica differiscono tra loro dell'**Ondulazione Geoidica** (**N_A = $A'A_0$** o **N_B = $B'B_0$** nella figura); quest'ultima è la distanza del geoide dall'ellissoide misurata lungo la normale (che si suppone praticamente coincidente con la verticale), ed è valutabile se si dispone di un **modello del geoide** ovvero se si conosce, anche mediante un'approssimazione numerica, la funzione **$N = N(\varphi, \omega)$.**

Dato un generico punto, in esso valgono le seguenti relazioni:

$$N = H - Q$$
$$H = Q + N$$
$$Q = H - N$$



Nelle applicazioni ingegneristiche e nella cartografia la quota che compare e che interessa i tecnici è sempre quella **ortometrica**, che corrisponde a un livello energetico del campo gravitazionale (determinante nei trasporti su ruota, nel moto dei fluidi nelle condotte e canali, ecc.).

L'**altezza ellissoidica**, che nella topografia classica non veniva quasi mai presa in considerazione, è oggi molto importante perché è il dato altimetrico che si ottiene dalle misure satellitari GNSS, ma ha un significato solo geometrico e non fisico, per cui nella la maggioranza delle applicazioni essa **deve sempre trasformata in quota ortometrica** togliendo ad essa l'ondulazione del geoide N come visto nella relazione Q = H – N riportata alla pagina precedente (che per questo viene anche detta anche *Prima equazione della livellazione GNSS*).

DISLIVELLI

Si definisce **Dislivello** Δ_{AB} tra due punti A e B la differenza tra le quote ortometriche dei due punti:

$$\Delta Q_{AB} = Q_B - Q_A$$

Il dislivello dimensionalmente è una lunghezza (m) ma, a differenza delle distanze, ha un **segno** positivo o negativo. C'è una convenzione per l'ordine dei pedici: dislivello AB significa quota di B meno quota di A, ovvero la quota del secondo (punto avanti) meno la quota del primo (punto indietro). Attenzione a questa regola, è facile sbagliare segno!

In modo analogo, si può definire **Dislivello Ellissoidico** la differenza tra le altezze ellissoidiche di due punti:

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A$$

Il dislivello ellissoidico ha scarso interesse nelle applicazioni ingegneristiche e cartografiche, perché come detto a proposito delle quote ha solo significato geometrico e non fisico. Esso deve quindi di norma essere trasformato in dislivello tra quote ortometriche, come segue:

$$\Delta Q_{AB} = Q_B - Q_A = \left(H_B - N_B\right) - \left(H_A - N_A\right) = H_B - H_A + N_A - N_B =$$
$$= \left(H_B - H_A\right) - \left(N_B - N_A\right) = \Delta H_{AB} - \Delta N_{AB}$$

relazione detta anche *Seconda equazione della livellazione GNSS* : il dislivello geoidico è dato dal dislivello ellissoidico meno la differenza delle ondulazioni del geoide.

Nella Topografia classica si misurano **dislivelli** e non **quote**. Le quote si ottengono a partire da un punto di quota nota (di norma un mareografo) sommando algebricamente i dislivelli misurati a partire da esso (in realtà si realizza una più o meno complessa **rete di livellazione** con misure ridondanti e la si compensa a minimi quadrati).

Le tecniche topografiche di misura dei dislivelli vengono indicate con il termine **LIVELLAZIONE.** Si distingue:

- **Livellazione Trigonometrica** o *a visuale inclinata*
- **Livellazione Geometrica** o *a visuale orizzontale*

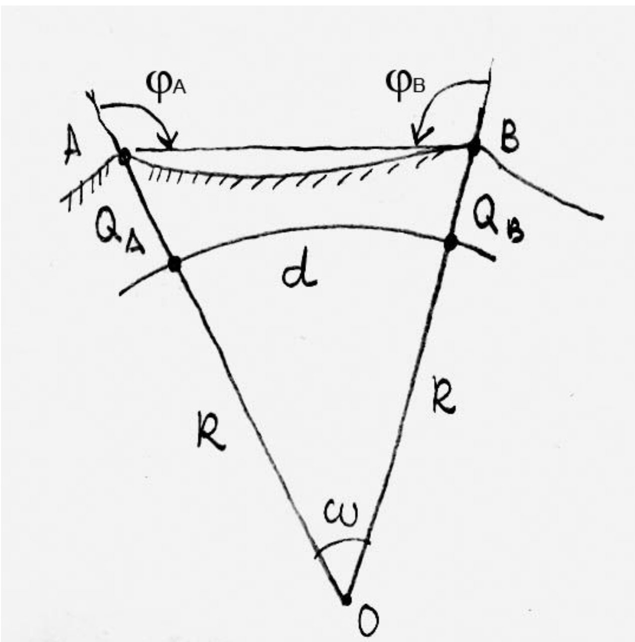
Si tralasciano qui altre tecniche di livellazione come quella **barometrica** (di bassa precisione, ca. 5-10 m, usata in Geologia, basata sull'impiego dell'altimetro-barometro) e quella **idrostatica** (usata a volte nei cantieri, basata sul principio dei vasi comunicanti).

Esiste poi la **Livellazione GNSS o GPS** nella quale essenzialmente le quote ortometriche vengono ottenute a partire da quelle ellissoidiche con le formule sopra citate che contengono le ondulazioni del geoide (è necessario disporre di un modello de geoide il più possibile accurato).

3.2. LA LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA

E' una tecnica di livellazione **a visuale inclinata,** basata sulla misura degli **angoli zenitali**. Lo strumento utilizzato è il **teodolite** (e le opportune **mire**)

A) LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA RECIPROCA



Si impiegano **2 teodoliti** posti in stazione sui 2 punti tra i quali si vuole misurare il dislivello, e si misurano gli **angoli zenitali** φ_A e φ_B, mediante opportune mire di collimazione (sostituite al teodolite sulla basetta o poste accanto ad esso su un altro treppiede)

Ipotesi:

- superficie di riferimento = sfera locale di raggio **R** (lecito essendo d < 10-15 km)

- trascuriamo (per ora) la rifrazione atmosferica

Dal teorema dei seni nel triangolo OAB:

$$\frac{R+Q_A}{sen(\pi-\varphi_B)} = \frac{R+Q_B}{sen(\pi-\varphi_A)}$$

$$\frac{R+Q_A}{sen\varphi_B} = \frac{R+Q_B}{sen\varphi_A}$$

applicando le proprietà del comporre e scomporre:

$$\frac{R+Q_B-R-Q_A}{R+Q_B+R+Q_A} = \frac{sen\varphi_A - sen\varphi_B}{sen\varphi_A + sen\varphi_B}$$

ricavando il dislivello e applicando le formule di prostaferesi:

$$Q_B - Q_A = (2R+Q_A+Q_B)\frac{2sen\frac{\varphi_A-\varphi_B}{2}\cos\frac{\varphi_A+\varphi_B}{2}}{2sen\frac{\varphi_A+\varphi_B}{2}\cos\frac{\varphi_A-\varphi_B}{2}} =$$

$$= 2R(1+\frac{Q_A+Q_B}{2R})tg\frac{\varphi_A-\varphi_B}{2}ctg\frac{\varphi_A+\varphi_B}{2}$$

essendo

$\pi-\varphi_A+\pi-\varphi_B+\omega=\pi$ da cui $\varphi_A+\varphi_B=\pi+\omega$

si ha:

$$ctg\frac{\varphi_A+\varphi_B}{2} = ctg(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2}) = -tg\frac{\omega}{2} \cong -\frac{\omega}{2} = -\frac{d}{2R}$$

poniamo inoltre

$$\frac{Q_A+Q_B}{2} = Q_m \quad \text{(quota media)}$$

Introducendo le altezze (offset) strumentali in A e in B h_A ed h_B si ottiene infine:

$$\boxed{\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d(1+\frac{Q_m}{R})tg\frac{\varphi_B-\varphi_A}{2} + h_A - h_B} \quad (1)$$

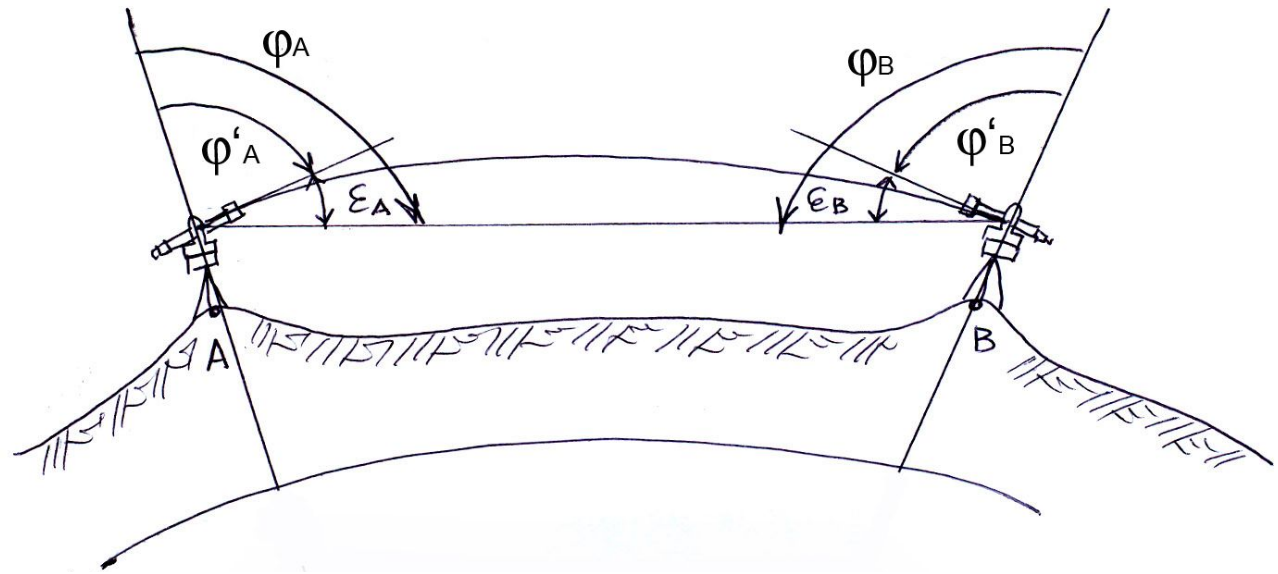
E' quindi necessario, oltre alla misura degli **angoli zenitali** φ_A e φ_B, conoscere la **distanza geodetica d** (la livellazione trigonometrica è una tecnica di livellazione *dipendente dalla distanza* – a differenza di quella geometrica che come vedremo è *indipendente dalla distanza*).

La quota media Q_m può essere inserita inizialmente come valore approssimato (ad es. preso dalla cartografia) ed eventualmente si può effettuare una o più iterazioni del calcolo per affinarlo.

Effetto della rifrazione atmosferica:

Se la misura di φ_A e φ_B è **simultanea** (cioè eseguita **contemporaneamente** con i 2 teodoliti entrambi in stazione) la traiettoria luminosa da A a B è la stessa che da B ad A (per una legge ottica nota come *principio di invertibilità del cammino luminoso*).
E' ragionevole ipotizzare che tale traiettoria sia simmetrica: le correzioni per rifrazione atmosferica nei 2 estremi si possono considerare uguali ($\varepsilon_A = \varepsilon_B$) e si elidono nella differenza $\varphi_A - \varphi_B$.

Nella formula (1) si possono allora inserire gli angoli zenitali osservati φ'_A e φ'_B, senza correzioni. In pratica, quindi, la rifrazione atmosferica non ha quasi alcun effetto sulla livellazione trigonometrica reciproca: è il più grande vantaggio di questo metodo.



$$\varphi_A = \varphi'_A + \varepsilon_A$$

$$\varphi_B = \varphi'_B + \varepsilon_B$$

per simmetria si ha $\varepsilon_A \cong \varepsilon_B$

per cui:

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi'_B + \varepsilon_B - \varphi'_A - \varepsilon_A \cong \varphi'_B - \varphi'_A$$

e quindi:

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d\left(1 + \frac{Q_m}{R}\right) tg \frac{\varphi'_B - \varphi'_A}{2} + h_A - h_B$$

Poiché la rifrazione, come si vedrà tra poco, è la maggior causa di errore nella livellazione trigonometrica, la tecnica simultanea e reciproca è la più accurata tra quelle di livellazione trigonometrica. E' però molto oneroso eseguire le osservazioni simultaneamente: occorrono due squadre di operatori, e compiuta una misura si deve attendere che una delle due squadre si sposti sul punto successivo. Nella pratica si utilizza quasi sempre la tecnica seguente (da un estremo) che è meno accurata ma molto meno costosa.

B) Livellazione trigonometrica da un estremo

Si impiega **1 solo teodolite** posto in stazione in un estremo (ad es. A), si pone una **mira** sull'altro estremo e si misura il solo angolo zenitale φ_A

Nella formula della livellazione reciproca si sostituisce a φ_B il suo valore calcolato per differenza dalla somma degli angoli interni nel triangolo AOB:

$$\varphi_B = \pi + \omega - \varphi_A = \pi + \frac{d}{R} - \varphi_A$$

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d\left(1+\frac{Q_m}{R}\right) tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d}{2R} - \frac{\varphi_A}{2} - \frac{\varphi_A}{2}\right) + h_A - h_B =$$

$$= d\left(1+\frac{Q_m}{R}\right) tg\left(\frac{\pi}{2} - \left(\varphi_A - \frac{d}{2R}\right)\right) + h_A - h_B =$$

$$= d\left(1+\frac{Q_m}{R}\right) ctg\left(\varphi_A - \frac{d}{2R}\right) + h_A - h_B$$

Introducendo la correzione all'angolo zenitale per tener conto della rifrazione atmosferica, $\varepsilon = \frac{kD}{2R}$ si ottiene:

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d\left(1+\frac{Q_m}{R}\right) ctg\left(\varphi'_A - \frac{(1-k)d}{2R}\right) + h_A - h_B$$

dove φ'_A è l'angolo zenitale effettivamente misurato

Ricordando lo sviluppo in serie della cotangente:

$$ctg(\varphi'_A - x) = ctg\varphi'_A + \frac{1}{sen^2\varphi'_A} x \cong ctg\varphi'_A + x$$

per cui la formula diventa:

$$\boxed{\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d\left(1+\frac{Q_m}{R}\right) ctg\varphi'_A + \frac{(1-k)d^2}{2R} + h_A - h_B} \qquad (2)$$

Il termine $\frac{(1-k)d^2}{2R}$ può essere interpretato come segue:

$\frac{d^2}{2R}$ correzione per sfericità, tiene conto della curvatura terrestre

$-k\frac{d^2}{2R}$ correzione per rifrazione atmosferica

A **brevi distanze** (< 500 m), trascurando la curvatura terrestre e la rifrazione, si può utilizzare la seguente formula semplificata:

$$\boxed{\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d \cdot ctg\varphi'_A + h_A - h_B} \qquad (3)$$

<u>Accuratezza della livellazione trigonometrica da un estremo</u>

Applichiamo la legge di propagazione della varianza-covarianza alla formula (2) semplificandola leggermente:

trascuriamo la correzione per quota media e le altezze strumentali in quanto incidono in modo trascurabile sull'errore complessivo; la formula si riduce a:

$$\Delta = d \cdot ctg\varphi + \frac{(1-k)}{2R} \cdot d^2$$

le variabili rispetto a cui derivare sono d, Z e k. Le loro deviazioni standard determinano l'accuratezza del dislivello ottenuto; il contributo della incertezza sulla distanza nel secondo termine della formula si trascura. Si ottiene:

$$\sigma_\Delta^2 = (ctg\varphi)^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{d}{sen^2\varphi}\right)^2 \cdot \sigma_\varphi^2 + \left(-\frac{d^2}{2R}\right)^2 \cdot \sigma_K^2$$

$$\sigma_\Delta^2 = ctg^2\varphi \cdot \sigma_d^2 + \frac{d^2}{sen^4\varphi} \cdot \sigma_\varphi^2 + \frac{d^4}{4R^2} \cdot \sigma_K^2$$

la σ_d può essere considerata proporzionale alla distanza. I primi due termini della formula (contributi della distanza e della zenitale) risultano quindi proporzionali a d^2 mentre il terzo termine (contributo di K) è proporzionale a d^4

Esempio numerico 1:

d = 1 km $\qquad \varphi = 90°$ $\qquad \sigma_\varphi = \pm$ 2" = 10^{-5} rad $\qquad \sigma_K = \pm$ 0,02

$\sigma_\Delta(d) = 0$ in quanto $ctg\varphi$ si annulla per visuale orizzontale

$\sigma_\Delta(\varphi) = \frac{10^3}{1} \cdot 10^{-5} = 10^{-2}$ m = 1 cm

$\sigma_\Delta(K) = \frac{10^6}{2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cong$ 0,003 m = 3 mm

quindi alle brevi distanze prevale l'effetto dell'incertezza sull'angolo zenitale, che è proporzionale alla distanza

Esempio numerico 2 :

d = 10 km $\qquad \varphi = 90^\circ \qquad \sigma_\varphi = \pm 2'' = 10^{-5}$ rad $\qquad \sigma_K = \pm 0{,}02$

$\sigma_\Delta(d) = 0$ come prima

$\sigma_\Delta(\varphi) = \frac{10^4}{1} \cdot 10^{-5} = 10^{-1}$ m = 10 cm

$\sigma_\Delta(K) = \frac{10^8}{2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cong$ 0,16 m = 16 cm

a distanze più lunghe prevale l'effetto dell'incertezza sul coefficiente K, che è proporzionale al quadrato della distanza

Per distanze maggiori di 10 km tale errore diviene intollerabile

In sostanza si è ottenuto che per le normali distanze di lavoro (qualche km) la deviazione standard del dislivello ottenuto per livellazione trigonometrica risulta **proporzionale alla distanza**, e può quindi essere stimata con l'espressione:

$$\boxed{\sigma_\Delta = C \cdot d}$$

dove alla costante *C* possono essere attribuiti di massima i seguenti valori:

C = 1 ÷2 cm/km per la livellazione simultanea e reciproca
C = 2 ÷5 cm/km per la livellazione da un estremo

Essendo la **varianza** σ^2 proporzionale al quadrato della distanza, i **pesi** da attribuire in una rete altimetrica ai dislivelli determinati per livellazione trigonometrica risultano inversamente proporzionali ai **quadrati delle distanze**:

$$\boxed{p_i = \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{1}{D_i^2}}$$

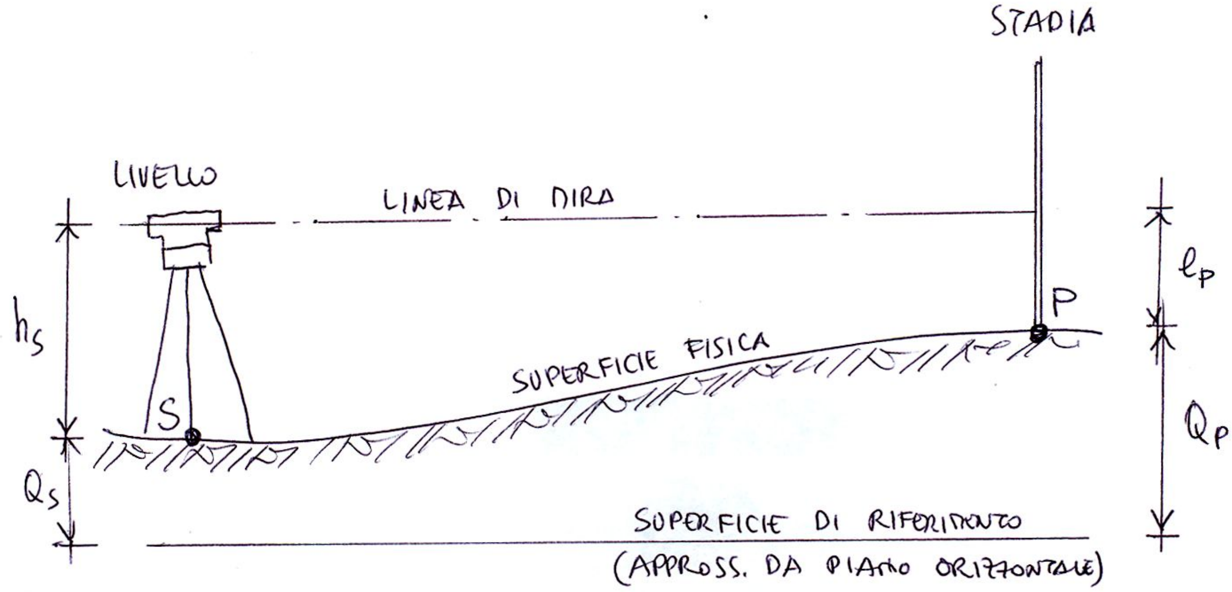
E' possibile anche effettuare livellazioni trigonometriche **dal mezzo** con battute consecutive in linea, con uno schema analogo a quello della livellazione geometrica. I risultati in termini di precisione sono buoni ma questa tecnica si è poco diffusa poiché si preferisce utilizzare la livellazione geometrica, che grazie all'introduzione dei livelli digitali ha oggi costi ragionevoli.

La livellazione trigonometrica da un estremo è caratterizzata come visto da errori abbastanza elevati. Attualmente, la livellazione trigonometrica viene usata quasi esclusivamente in rilievi locali a breve distanza, e tende sempre più frequentemente ad essere sostituita dalla **livellazione GPS (o GNSS)** che ha un'accuratezza simile o superiore ed è molto meno onerosa in termini di tempo e impegno.

3.3. LA LIVELLAZIONE GEOMETRICA

E' una tecnica di livellazione **a visuale orizzontale** e *indipendente dalla distanza*. Lo strumento utilizzato è uno strumento specifico per questo tipo di misure, a cannocchiale orizzontale, detto **livello** (v. par. 3.4), che si utilizza insieme a una o meglio due **stadie** (aste graduate).

A) Livellazione geometrica da un estremo



Ipotesi:

- linea di mira orizzontale (si trascura l'errore di rettifica del livello)
- stadia perfettamente verticale (ha una livella sferica)
- superficie di riferimento approssimata da piano orizzontale
  (la distanza è < 100 m , oltre la stadia non è più ben leggibile)
- si trascura la rifrazione atmosferica

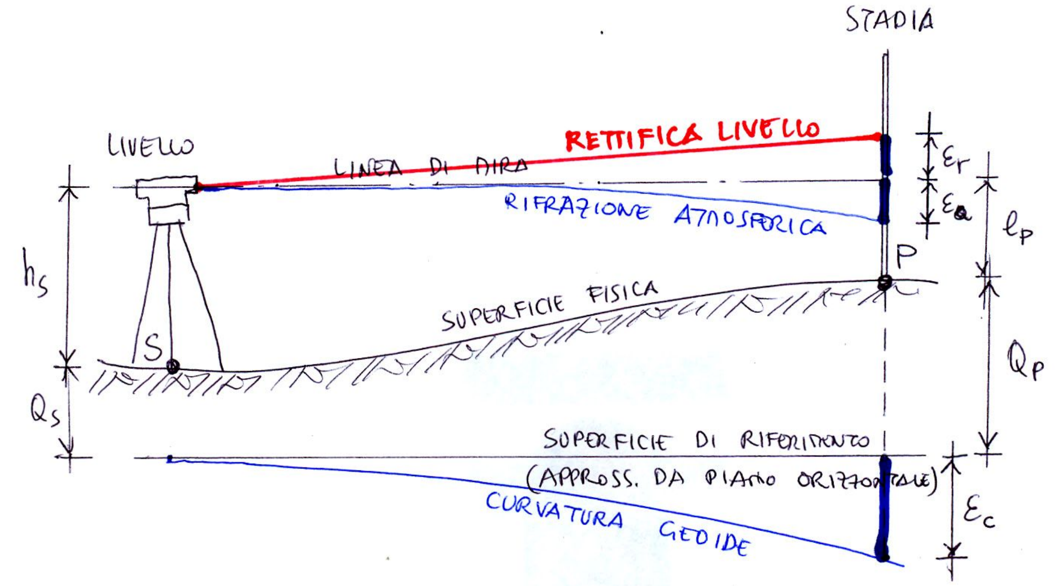
Sotto queste ipotesi la linea di mira è parallela al piano orizzontale di riferimento, per cui si ha:

$$h_S + Q_S = l_P + Q_P$$

da cui si ricava:

$$\Delta_{SP} = Q_P - Q_S = h_S - l_P$$

Errori nella livellazione da un estremo:

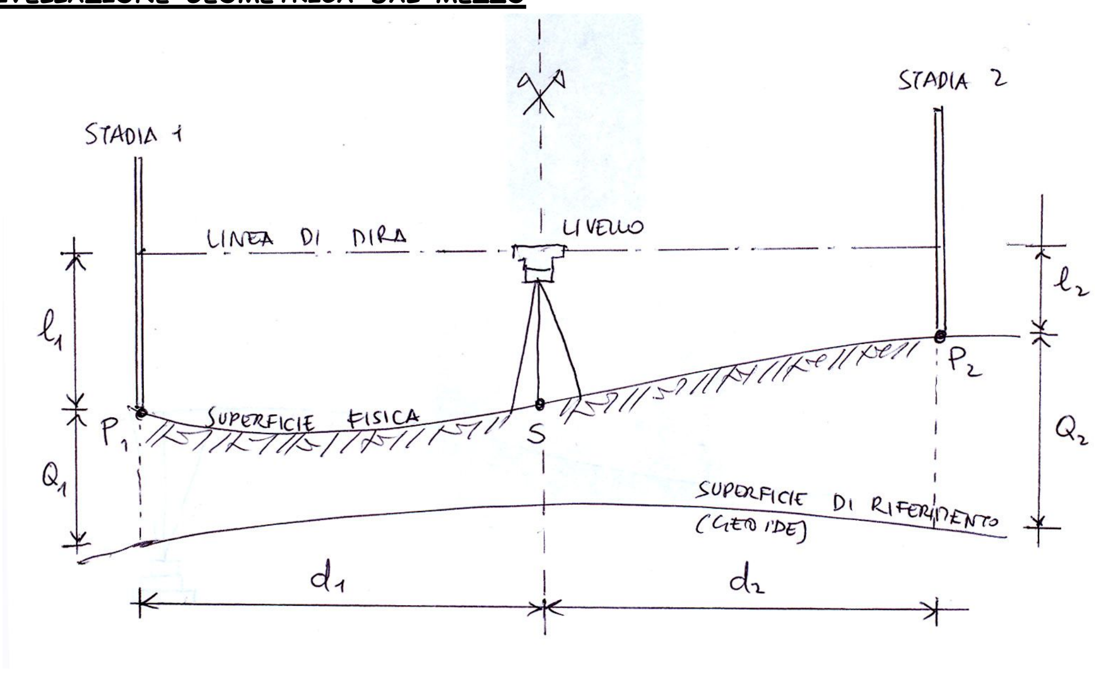


Sono dovuti:

- alla imperfetta rettifica del livello (ε_r)
- alla curvatura della superficie di riferimento (ε_c)
- alla rifrazione atmosferica (ε_a)
- alla misura dell'altezza strumentale h_S che viene fatta a ± 1 cm

I primi tre sono errori sistematici, il quarto è accidentale. Sono comunque errori piuttosto forti, per cui la livellazione da un estremo risulta poco accurata (σ_Δ dell'ordine di alcuni cm per una distanza max. di 50-100 m circa, più o meno la stessa entità di errori della livellazione trigonometrica da un estremo)

B) LIVELLAZIONE GEOMETRICA DAL MEZZO



Ipotesi:

- si fa stazione in un punto intermedio **equidistante dalle due stadie:** le distanze d_1 e d_2 devono essere uguali tra loro con un'approssimazione dell'1-2% circa (0,5 ÷ 1 m su 50 m); non è necessario che il punto di stazione e le due stadie siano allineati, l'importante è che **le due distanze siano uguali** con l'approssimazione sopra detta
- linea di mira simmetrica rispetto al punto di stazione (è verificata, perché l'errore di rettifica è sistematico e quindi è lo stesso sui due lati)
- superficie di riferimento simmetrica rispetto al punto di stazione (si può considerare lecita perché la distanza strumento-stadia è piccola, sempre inferiore ai 50 m)
- effetto della rifrazione atmosferica simmetrico rispetto al punto di stazione (ipotesi meno lecita delle due precedenti: la rifrazione come noto dipende dalle condizioni dell'atmosfera e queste possono essere diverse, ad es. possiamo avere ombra su un lato e sole sull'altro, quindi temperature dell'aria diverse; esistono alcuni studi sull'effetto della asimmetria di rifrazione)

Sotto queste ipotesi si ha:

$$l_1 + Q_1 = l_2 + Q_2$$

da cui si ricava:

$$\Delta_{12} = Q_2 - Q_1 = l_1 - l_2$$

Il punto 1 viene detto **punto indietro**, il punto 2 **punto avanti**. Il dislivello è dato allora dalla differenza **(lettura indietro — lettura avanti),** che può risultare positiva o negativa.

Attenzione al segno!

Il dislivello che si ottiene è $\Delta_{indietro\text{-}avanti}$ ovvero ($Q_{avanti} - Q_{indietro}$)

Gli **errori** che abbiamo evidenziato nella livellazione da un estremo **si annullerebbero tutti nella livellazione dal mezzo** se le ipotesi di simmetria fatte fossero vere.
In realtà tali ipotesi non sono perfettamente vere per cui gli errori non si annullano completamente (quello della rifrazione in particolare) ma si riducono notevolmente.

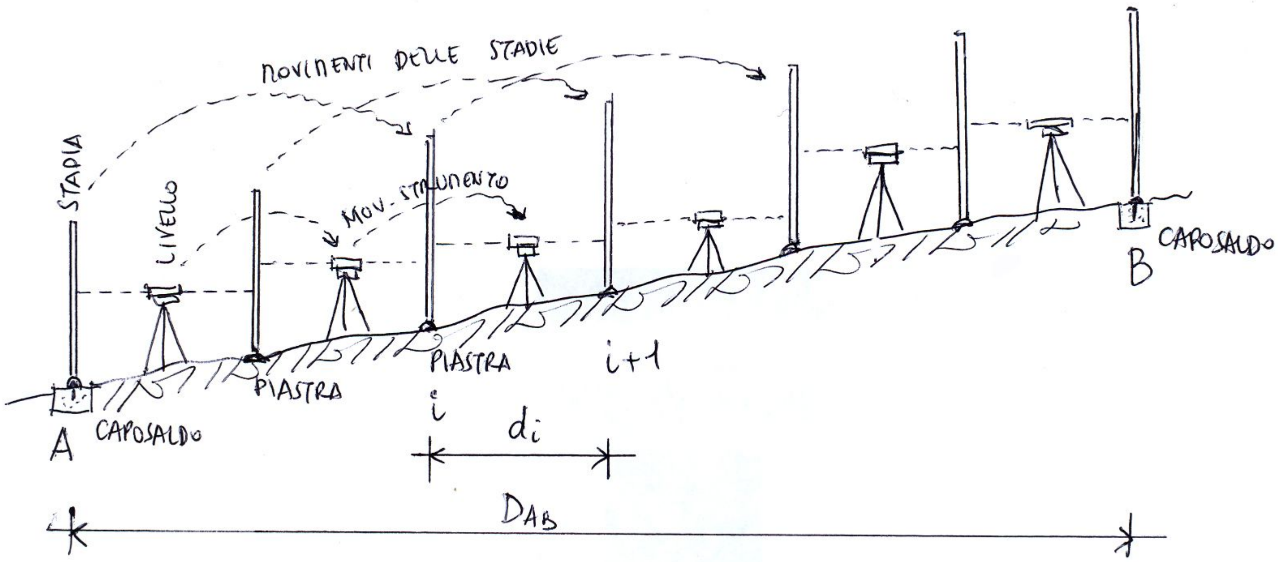
In ogni caso gli errori diventano piccoli, per cui **la livellazione geometrica dal mezzo è ancora oggi la tecnica topografica più accurata per la determinazione dei dislivelli**.

Linee di livellazione

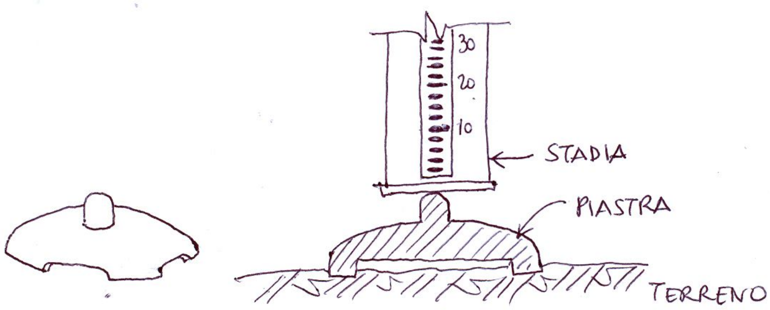
La lunghezza di una **battuta** di livellazione (schema precedente: livello e due stadie) è di 100 m **max.** in pianura, e si riduce a poche decine di metri su percorsi in pendenza: se la pendenza è forte la stadia si deve mettere vicina altrimenti la linea di mira le passa al di sotto o al di sopra; oltre i 50 m di distanza (valore <u>massimo</u>) la lettura alla stadia non è più sufficientemente accurata.

Per collegare altimetricamente punti distanti, si realizzano allora **linee di livellazione** costituite da più battute effettuate in sequenza.

Si opera con un livello e una coppia di stadie, che via via vengono spostati in avanti lungo il percorso della linea di livellazione, effettuando una battuta dopo l'altra, secondo lo schema della figura sottostante:



Per controllare la propagazione degli errori si dispongono lungo le linee di livellazione dei **CAPOSALDI** (punti materializzati permanentemente) a una distanza l'uno dall'altro che dipende dal tipo di lavoro (ad es. per le linee della rete altimetrica nazionale IGM i caposaldi sono uno ogni km circa; nelle reti locali di *monitoraggio* cioè di misura e controllo degli abbassamenti del suolo o di edifici si usano caposaldi molto più ravvicinati). Nei punti intermedi tra un caposaldo e l'altro la stadia viene poggiata su una apposita **piastra** in ghisa con testina semisferica (v. figura): in una livellazione di precisione la stadia non va **mai** poggiata direttamente a terra.



Il dislivello tra due caposaldi si ottiene per **somma algebrica dei dislivelli parziali** di ogni battuta:

$$\Delta_{AB} = \sum_{1}^{n} \Delta_i = \sum_{1}^{n} \left(l_i - l_{i+1}\right)$$

La misura viene eseguita due volte per ciascun tratto di linea, in **andata** e **ritorno**. Ciò richiede che si effettui due volte il percorso tra i due caposaldi (appunto in *andata* e *ritorno*).

I due valori Δ'_{AB} e Δ''_{AB} del dislivello ottenuti in andata e ritorno vengono confrontati: la differenza tra essi deve risultare inferiore ad una **tolleranza** prestabilita (ad es. da un capitolato) e calcolata di solito mediante la formula:

$$t_\Delta = (2 \div 3) k \sqrt{D}$$

la tolleranza si assume pari a 2 o 3 volte la deviazione standard valutata a priori (il significato di questa formula risulterà chiaro dopo aver svolto la propagazione – v. ultima parte paragrafo sulla livellazione geometrica).

Se la differenza tra Δ'_{AB} e Δ''_{AB} supera la tolleranza, le misure non vengono accettate e va eseguita una "terza misura" Δ'''_{AB} per la quale si controlla che sia in tolleranza con almeno una delle due precedenti.

Verificato il rispetto della tolleranza, il dislivello si determina per media aritmetica tra i due valori di andata e ritorno:

$$\Delta^{m}_{AB} = \frac{\Delta'_{AB} + \Delta''_{AB}}{2}$$

Per livellazioni tecniche viene normalmente accettata una variante semplificativa in cui si effettua il percorso una sola volta, e ogni battuta viene eseguita 2 volte di seguito:

- si posizionano le stadie e si effettua una prima battuta (lettura indietro e lettura avanti) che vale come "andata";
- si varia il punto di stazione del livello di qualche centimetro spostando il treppiede (a volte si varia solo l'altezza dello strumento agendo sulle viti di base) e si effettua una seconda battuta (lettura avanti e lettura indietro) che vale come "ritorno";
- si controlla subito che i due valori del dislivello di "andata" e "ritorno" differiscano tra loro meno di una prefissata **tolleranza per la battuta** (ad es. 0,3 mm).

Accuratezza della livellazione geometrica

Applicando la legge di propagazione determiniamo l'accuratezza di una linea di livellazione geometrica, in funzione della distanza

Consideriamo inizialmente una singola battuta di livellazione (livello e 2 stadie):

$\Delta = l_i - l_a$ (lettura indietro meno lettura avanti)

applichiamo la legge di propagazione. Detta σ_l la deviazione standard di una lettura alla stadia (che si può ritenere costante per tutte le letture) si ha:

$\sigma_\Delta^2 = \sigma_l^2 + \sigma_l^2 = 2\sigma_l^2$ per cui:

$\sigma_\Delta = \sigma_l \sqrt{2}$

che può essere ritenuta costante per tutte le battute di una stessa linea eseguita con la stessa strumentazione

Per una linea tra due caposaldi A e B comprendente n battute si ha:

$$\Delta_{AB} = \sum_1^n (l_i - l_a) = \sum_1^n \Delta_i$$

applicando alla sommatoria la legge di propagazione si ottiene quindi:

$$\sigma_{\Delta_{AB}}^2 = \sum_1^n \left(\sigma_\Delta^2\right) = \sum_1^n \left(2\sigma_l^2\right) = 2n\sigma_l^2$$

$$\sigma_{\Delta_{AB}} = \sqrt{2n\sigma_l^2} = \sigma_l\sqrt{2n}$$

detta d la lunghezza media di una battuta e D la lunghezza totale della linea tra A e B si ha:

$$n = \frac{D}{d}$$

da cui:

$$\sigma_{\Delta_{AB}} = \sigma_l \sqrt{2\frac{D}{d}}$$

le quantità σ_l e d si possono ritenere costanti per cui conglobandole in un'unica costante

$$K = \sigma_l \sqrt{\frac{2}{d}}$$

si può scrivere:

$$\boxed{\sigma = K \cdot \sqrt{D}}$$

Applicando la legge di propagazione si ottiene quindi che *la deviazione standard del dislivello valutato con una linea di livellazione geometrica è proporzionale alla* ***radice quadrata della distanza***

La **varianza** σ^2 è il quadrato della deviazione standard e risulta pertanto proporzionale alla **distanza**: allora *i* ***pesi*** *da attribuire in una rete altimetrica ai dislivelli determinati per livellazione geometrica devono essere* ***inversamente proporzionali alle distanze***:

$$\boxed{p_i = \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{1}{D_i}}$$

Inseriamo nella formula dei valori numerici:

$D = 1\,km \qquad d = 100m \qquad n = \frac{1000}{100} = 10 \qquad \sigma_l = 0{,}2\,mm$

$$\sigma_{\Delta_{AB}} = \sigma_l \sqrt{2n} = 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{20} = 8{,}9 \cdot 10^{-4}\, m \cong 1 \;\; mm$$

se la misura è eseguita due volte (andata e ritorno) si avrà

$$\Delta^m_{AB} = \frac{\Delta'_{AB} + \Delta''_{AB}}{2}$$

applicando ancora una volta la legge di propagazione:

$$\sigma^2_{\Delta^m_{AB}} = \frac{1}{4}\sigma^2_{\Delta_{AB}} + \frac{1}{4}\sigma^2_{\Delta_{AB}} = \frac{1}{2}\sigma^2_{\Delta_{AB}}$$

$$\sigma_{\Delta^m_{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{\Delta_{AB}} \cong \;\; 0.6 \;\; mm$$

La deviazione standard valutata per la distanza di 1 km è detta **errore medio chilometrico** della livellazione.

Nella livellazione geometrica di precisione l'errore medio chilometrico risulta dell'ordine di grandezza di **1 mm/km.** Nessuna altra tecnica di livellazione raggiunge attualmente una tale accuratezza.

Per linee di livellazione di maggior lunghezza una stima dell'accuratezza si può ottenere **moltiplicando l'errore medio chilometrico per la radice quadrata della lunghezza espressa in km.** La propagazione, poiché avviene con la **radice** della distanza, è molto più lenta che nella livellazione trigonometrica: altro fatto vantaggioso che rende la livellazione geometrica molto più accurata.