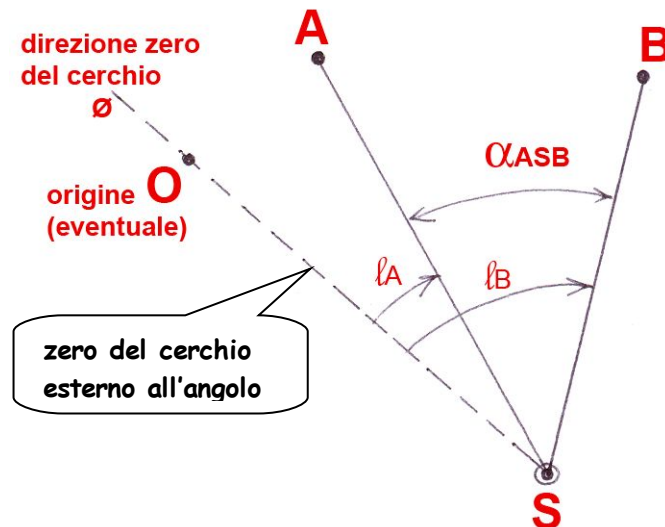


## 1.4. MISURA DEGLI ANGOLI AZIMUTALI

Con il teodolite in stazione nel punto S, si collimano il punto indietro A e il punto avanti B, e si eseguono le rispettive letture al cerchio azimutale  $l_A$  e  $l_B$ . La graduazione del cerchio cresce sempre in senso orario. L'angolo azimutale si ottiene per differenza di letture (vedi figura):



$$\alpha_{ASB} = l_B - l_A$$

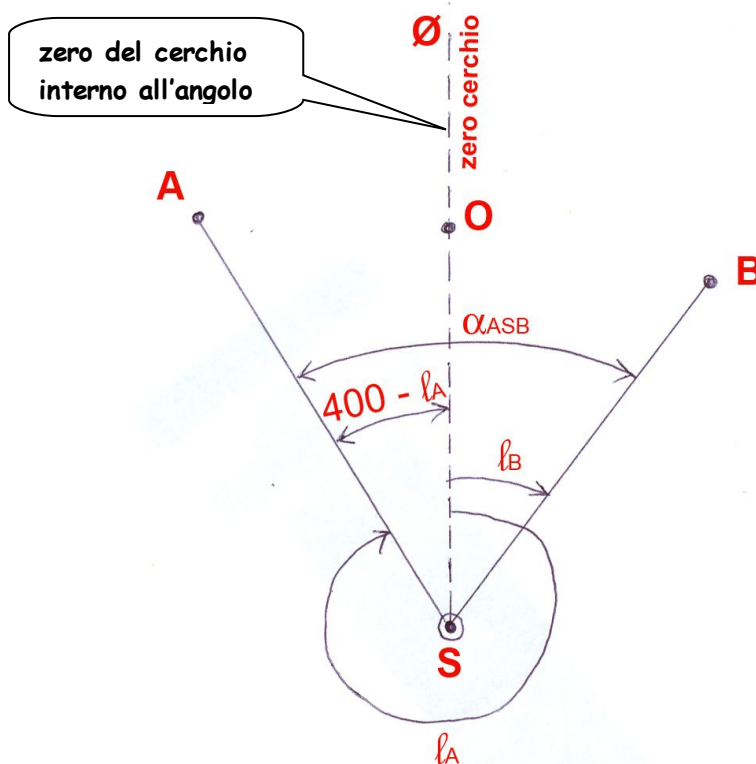
ovvero

**angolo azimutale = lettura punto avanti - lettura punto indietro**

si può notare che in casi come questo risulta  $(l_B - l_A) > 0$

E' consigliabile (anche se non indispensabile) **orientare** lo zero del cerchio verso un punto **origine O** fisicamente esistente e ben visibile. E' un buon accorgimento operativo perché sul terreno, a misura conclusa, resta materializzato un sistema polare (con origine in S dove esiste un centrino, e direzione origine S-O). Se si deve tornare sul posto a completare le misure, è facile orientarsi esattamente allo stesso modo della stazione già eseguita. L'**orientamento del cerchio** verso un punto prestabilito si esegue nei teodoliti classici con la *vite di reiterazione* o con il dispositivo *ripetitore* (levetta che collega il cerchio all'alidada o al basamento). Nei teodoliti elettronici è possibile azzerare via software la lettura su una data direzione.

Nella figura qui sopra, *lo zero del cerchio cade esternamente all'angolo* da misurare, e la differenza delle letture (p.avanti - p.indietro) risulta quindi positiva. *Se lo zero cade all'interno dell'angolo*, la differenza delle letture (p.avanti - p.indietro) risulta *negativa*. In tal caso è necessario aggiungere ad essa un angolo giro (v. pagina seguente).



risulta	$\alpha_{ASB} = l_B + (400 - l_A)$	da cui
	$\alpha_{ASB} = (l_B - l_A) + 400$	
	ovvero	
	<b>angolo azimutale = (lettura punto avanti - lettura punto indietro) + 400</b>	

In pratica, riassumendo:

L'angolo azimutale tra due punti si ottiene sempre dalla differenza (lettura p.avanti - lettura p.indietro). Se essa risulta **positiva** lo zero è esterno all'angolo (v. pagina precedente) e non si aggiunge niente. Se la differenza è **negativa**, lo zero è interno all'angolo e si deve aggiungere un angolo giro

**LA REGOLA DI BESSEL**

Si è visto come il teodolite sia utilizzabile in due posizioni (*diritta e capovolta*, dette anche *cerchio a destra e cerchio a sinistra*).

Si può dimostrare che alcuni errori sistematici sull'angolo azimutale, in particolare i seguenti:

- errore residuo di inclinazione (2^ condizione di rettifica)
- errore residuo di collimazione (3^ condizione di rettifica)
- errore di eccentricità del cannocchiale (condizione di costruzione)

si manifestano *con lo stesso valore ma con segno opposto* nella posizione diritta e in quella capovolta. Quindi, se si esegue la *media* delle due letture "coniugate" un errore positivo si somma a un uguale errore negativo per cui complessivamente l'errore si elide. Risulta allora:

### Regola di Bessel:

La media delle due letture azimutali "coniugate" (diritta e capovolta) è esente dagli errori di rettifica della 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> condizione e dall'errore di eccentricità del cannocchiale

La media va effettuata tenendo conto che le due letture coniugate differiscono di un angolo piatto, in quanto l'alidada viene ruotata di 180° tra l'una e l'altra. Traducendo quindi la regola di Bessel in formula si ha:

$$l_m = \frac{l^{C.S.} + (l^{C.D.} \pm 200^g)}{2}$$

N. B. : il segno dentro la parentesi va assunto positivo se  $l^{C.D.} < 200^g$ , negativo se  $l^{C.D.} > 200^g$

### Esempi numerici:

1)

$$\begin{aligned} l^{C.S.} &= 103,3520^g \\ l^{C.D.} &= 303,3530^g \\ l_m &= \frac{l^{C.S.} + (l^{C.D.} \pm 200^g)}{2} = \frac{103,3520^g + (303,3530^g - 200^g)}{2} = \\ &= \frac{103,3520^g + 103,3530^g}{2} = 103,3525^g \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} l^{C.S.} &= 248^\circ 23'36'' \\ l^{C.D.} &= 68^\circ 23'40'' \\ l_m &= \frac{l^{C.S.} + (l^{C.D.} \pm 180^\circ)}{2} = \frac{248^\circ 23'36'' + (68^\circ 23'40'' + 180^\circ)}{2} = \\ &= \frac{248^\circ 23'36'' + 248^\circ 23'40''}{2} = 248^\circ 23'38'' \end{aligned}$$

in pratica, il calcolo può essere effettuato facilmente a mano: la lettura media si ottiene prendendo la parte intera (gradi, primi) della lettura cerchio a sinistra, e aggiungendo ad essa la media dei secondi.

Con i dati dell'esempio 1:

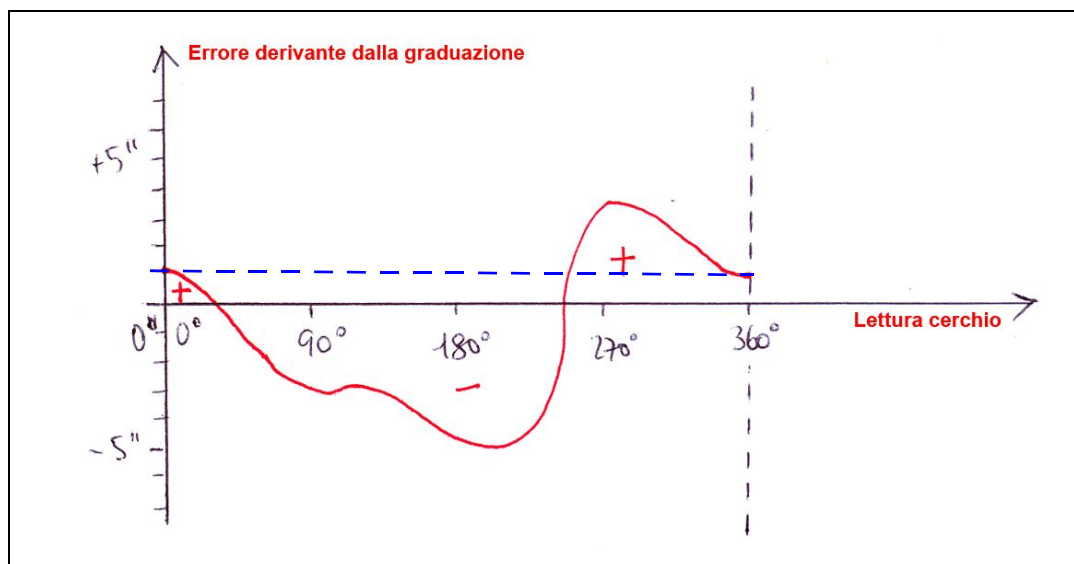
$$103,35^g + (20^{cc} + 30^{cc})/2 = 103,35^g + 25^{cc} = 103,35^g + 0,0025^g = 103,3525^g$$

La regola di Bessel va applicata **sempre** nelle misure angolari di una certa importanza. In pratica, l'unico caso in cui si omette di applicarla è il cosiddetto rilievo "celerimetrico" (v. seguito, dispense sul rilevamento).

## LA REITERAZIONE

Nelle misure angolari più importanti (ad es. nelle reti di triangolazione), in cui si richiede una precisione spinta, si ricorre alle cosiddette tecniche di *reiterazione* (o *ripetizione\**) che consistono nel ripetere la misura dell'angolo azimutale più volte, con posizioni diverse del cerchio, e poi farne la media.

In questo modo si mediano gli *errori accidentali di collimazione* (coincidenza imposta dall'operatore tra reticolo del cannocchiale e immagine della mira, che dipende dalle condizioni di visibilità, illuminazione, ecc. oltre che dalla vista e dall'apprezzamento dell'operatore), riducendone complessivamente l'entità. Inoltre, dato che si mediano letture eseguite in zone diverse del cerchio, si riduce l'effetto degli *errori di graduazione* (che hanno segno positivo e negativo avendo andamento periodico sui  $360^\circ$  del cerchio).

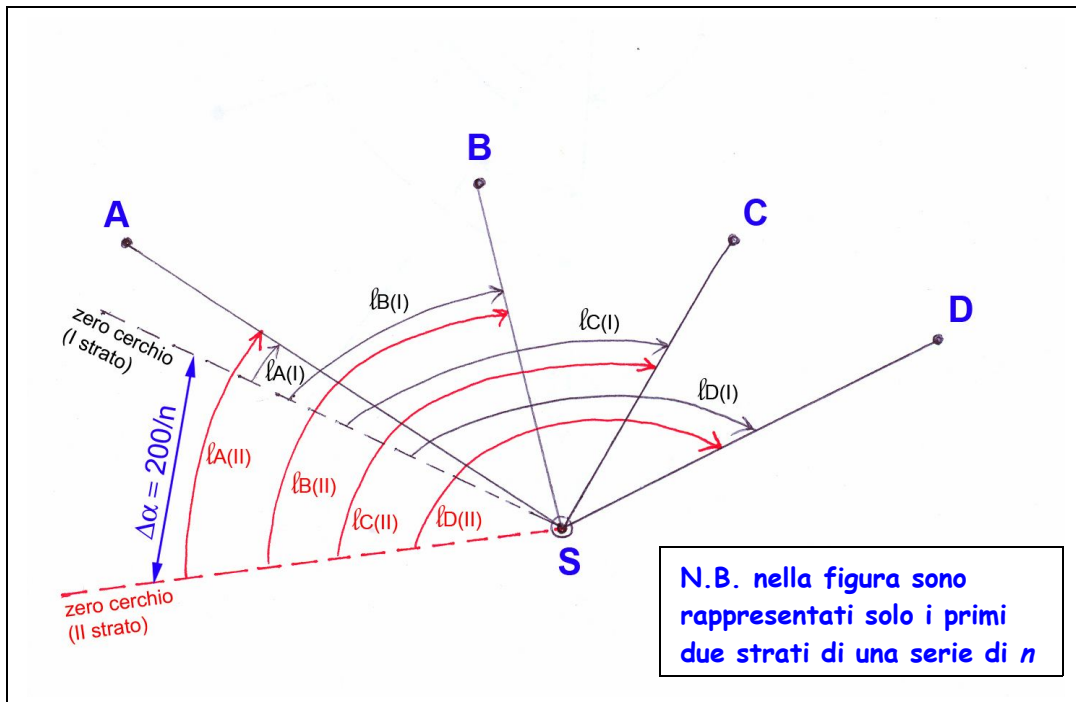


Errore periodico di graduazione  
(si può determinare in laboratorio su un banco di taratura)

Esistono diverse tecniche di reiterazione. Il metodo più utilizzato nella pratica è quello **a strati**, illustrato dalla figura alla pagina seguente

- I teodoliti si distinguono in **reiteratori** (quelli dotati della vite di reiterazione, già vista, che consente di orientare il cerchio indipendentemente da alidada e basamento agendo su tale vite, che muove il cerchio mediante un meccanismo a pignone e cremagliera), e **ripetitori**, dotati di un sistema più economico costruttivamente, che consente di solidarizzare il cerchio azimutale all'alidada o al basamento, per mezzo di un'apposita levetta o di una doppia coppia di viti di arresto - piccoli movimenti; l'orientamento del cerchio nei ripetitori viene effettuato come segue: si blocca il cerchio all'alidada, lo si trascina con essa nella direzione voluta, e poi lo si riblocca al basamento. Nei teodoliti elettronici dotati di sistema di lettura **dinamico** si fa a meno di tali dispositivi meccanici, perché la lettura avviene sempre come media di tutto il cerchio.

## Metodo a strati:



### I strato:

Si orienta il cerchio in modo che sul primo punto (o sull'origine, se presente) si faccia una lettura di poco superiore allo 0. Mantenendo il cerchio così orientato, si effettuano le letture su tutti i punti da rilevare (tutto il "giro d'orizzonte"), diritte e capovolte e relative medie con la regola di Bessel. Dalla serie di letture del primo strato  $l_A(I)$ ,  $l_B(I)$ ,  $l_C(I)$ ,  $l_D(I)$  (tutte medie Bessel) si ottengono per differenza (punto avanti - punto indietro) gli **angoli del primo strato**:

$$\alpha_{ASB(I)} = l_B(I) - l_A(I)$$

$$\alpha_{BSC(I)} = l_C(I) - l_B(I)$$

$$\alpha_{CSD(I)} = l_D(I) - l_C(I)$$

### II strato:

Si sposta il cerchio all'indietro (cioè in senso antiorario) di una quantità  $\Delta\alpha = 200/n$  rispetto allo strato precedente, dove  $n$  è il numero di strati (reiterazioni) che si vuole eseguire. Se ad esempio  $n = 4$ , risulta  $\Delta\alpha = 200/4 = 50^\circ$ , per cui si fa in modo che sul primo punto (o sull'origine, se presente) si faccia una lettura di poco superiore a  $50^\circ$ . Mantenendo il cerchio così orientato, si effettuano le letture su tutti i punti da rilevare (tutto il "giro d'orizzonte"), diritte e capovolte e relative medie con la regola di Bessel. Dalla serie di letture del secondo strato  $l_A(II)$ ,  $l_B(II)$ ,  $l_C(II)$ ,  $l_D(II)$  (medie Bessel) si ottengono per differenza (sempre punto avanti - punto indietro) gli **angoli del secondo strato**:

$$\alpha_{ASB(II)} = l_B(II) - l_A(II)$$

$$\alpha_{BSC(II)} = l_C(II) - l_B(II)$$

$$\alpha_{CSD(II)} = l_D(II) - l_C(II)$$

### **i-esimo strato successivo:**

Si sposta il cerchio ancora all'indietro di una quantità  $\Delta\alpha = 200/n$  rispetto allo strato precedente. Se ad es. si ha  $n = 4$ , da cui  $\Delta\alpha = 200/4 = 50^\circ$ , si fa in modo che sul primo punto (o sull'origine, se presente) si faccia una lettura di poco superiore a quella dello strato precedente aumentata di  $50^\circ$ . Si effettuano quindi le letture su tutti i punti da rilevare, come negli strati precedenti, e si ottengono gli **angoli dell' i-esimo strato**:

$$\alpha_{ASB}(i) = \ell_B(i) - \ell_A(i)$$

$$\alpha_{BSC}(i) = \ell_C(i) - \ell_B(i)$$

$$\alpha_{CSD}(i) = \ell_D(i) - \ell_C(i)$$

... e così via fino ad arrivare all'ultimo strato (n-esimo) che completa il lavoro di campagna.

A questo punto, per ogni angolo del "giro di orizzonte" si dispone di n misure, che essendo state effettuate con lo stesso strumento e nelle stesse condizioni possono ritenersi di ugual precisione. Il valore più probabile di ciascun angolo è allora dato dalla **media aritmetica** degli n valori misurati nei singoli strati:

$$\bar{\alpha}_{ASB} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_{ASB}(i)}{n}, \text{ ecc. per gli altri angoli}$$

Per valutare a posteriori la precisione raggiunta nella misura di ogni angolo, si determinano gli **scarti** dei singoli valori (di ciascuno strato) dalla media:

$$v_i = \alpha_{ASB}(i) - \bar{\alpha}_{ASB}$$

con i quali si calcolano infine i parametri stocastici dell'angolo:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1} \quad \text{varianza campionaria}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad \text{deviazione standard campionaria}$$

$$s(\bar{\alpha}) = \frac{s}{n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}} \quad \text{deviazione standard della media}$$

Il numero  $n$  degli strati da eseguire varia in funzione della precisione da raggiungere e dell'importanza del rilievo. Si va da un minimo di  $n=2$  o  $n=4$  per reti locali a carattere tecnico, a valori molto elevati per lavori di alta precisione e particolari (ad es.  $n=24$  adottato dall'IGM per la rete di triangolazione del I ordine).

### ACCURATEZZA NELLA MISURA DEGLI ANGOLI AZIMUTALI

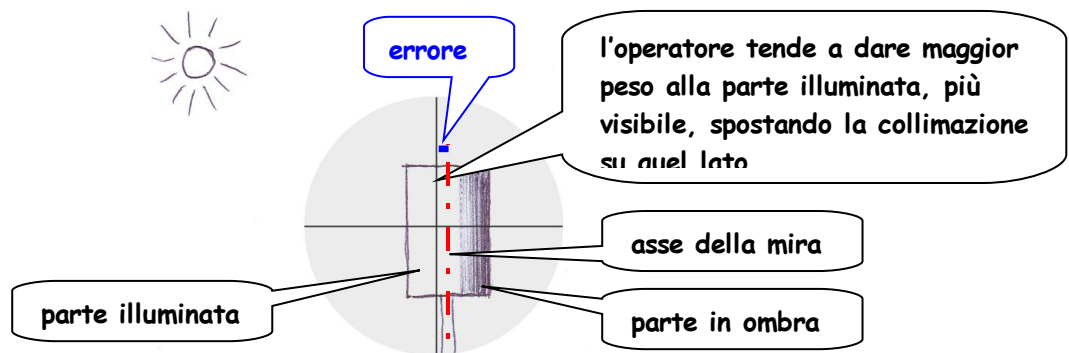
Nella misura degli angoli azimutali è possibile commettere **errori** di vario tipo, che possono essere distinti come segue:

#### ERRORI GROSSOLANI

- errata individuazione del punto da collimare
- errori di lettura e di trascrizione dei valori letti (teodoliti ottico-meccanici)
- errori nella numerazione dei punti, cancellazione di files (teodoliti elettronici)
- spostamenti indesiderati dello strumento durante l'esecuzione della stazione (basta un colpetto dato inavvertitamente a una zampa del treppiede)

#### ERRORI SISTEMATICI

- effetto degli errori residui di rettifica (il più pericoloso è quello di verticalità, quando la visuale è molto inclinata)
- effetto di condizioni di costruzione non perfettamente rispettate
- "errore di fase" nella collimazione: a seconda delle condizioni di illuminazione (variabili nel corso della giornata) alcuni tipi di mire (ad es. quelle cilindriche) possono essere collimate in modo diverso



- effetto della componente sul piano orizzontale della rifrazione atmosferica (detta "rifrazione laterale"): la non omogeneità della densità dell'aria lungo il percorso ottico, dovuta a differenze di temperatura tra zone soleggiate e ombreggiate, ecc., fa sì che il percorso ottico dal teodolite alla mira non sia una linea retta ma una curva. Non è possibile modellare questo fenomeno dato che varia moltissimo da caso a caso. Se le misure sono ripetute in orari e condizioni diverse, questo tipo di errori si manifesta con segni e valori diversi e la media lo compensa in parte, in modo simile agli errori accidentali.

*E' importante evitare di passare con la visuale attraverso fogliame o vicino a edifici o altri oggetti che nascondono in parte la mira: anche se la mira si riesce a mettere a fuoco, la misura è imprecisa per l'effetto della rifrazione.*

## ERRORI ACCIDENTALI

- errori di collimazione della mira: la collimazione non è mai "perfetta" ma dipende dalle capacità visive e dall'apprezzamento dell'operatore. I teodoliti robotizzati hanno una telecamera interna che collima alcuni tipi di mire standard (ad es. un prisma) automaticamente, con ripetibilità migliore rispetto a un operatore umano.
- errori di stima della coincidenza del micrometro (teodoliti ottico-meccanici).
- piccoli movimenti del treppiede o del teodolite durante la misura, dovuti ad es. ad effetti termici (è bene proteggere lo strumento dall'insolazione diretta in estate usando un ombrellone) o ad assestamenti delle zampe del treppiede nel terreno (es. su terreno naturale poco compatto o su asfalto caldo).

Per effetto di questi errori, l'accuratezza raggiungibile **in pratica** nella misura di un angolo è stimabile di massima come segue:

$\sigma_{\alpha} = 1'' - 2''$  con teodoliti di alta precisione (0.1"), mire di tipo adeguato, risultati variabili in funzione delle condizioni di visibilità

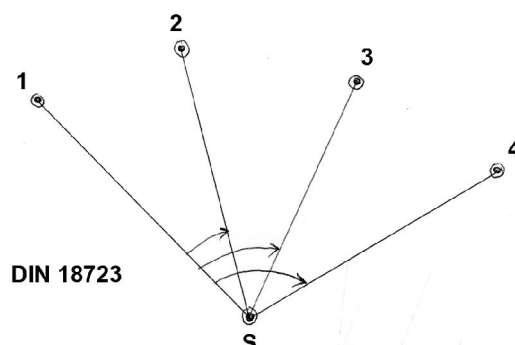
$\sigma_{\alpha} = 2'' - 5''$  con teodoliti di precisione (sensibilità 1"), mire di tipo adeguato, risultati variabili in funzione delle condizioni di visibilità

$\sigma_{\alpha} = 10'' - 1'$  con teodoliti di minor precisione (che fino ad alcuni anni fa venivano detti *tacheometri*)

Esiste una normativa di riferimento ([DIN 18723](#), Germania) che permette di valutare la precisione di un teodolite in modo obiettivo, in base a un test sperimentale standardizzato. Il test della DIN 18723 consiste in pratica nell'effettuare misure angolari in 4 strati con lettura diritta e capovolta su 4 mire standard poste a distanza di circa 100 m dal teodolite. La precisione viene valutata a posteriori dai risultati del test in base alla deviazione standard campionaria.

Molti costruttori di strumenti riportano nella documentazione dei vari modelli di teodolite i risultati raggiunti con tale prova, che è facilmente riproducibile da parte di qualunque tecnico.

I risultati della DIN 18723 sono utili soprattutto a *comparare* diversi modelli di teodolite. L'accuratezza reale, come si è detto, dipende dalle condizioni operative reali che si verificano all'atto di ciascuna misura, e da fattori esterni al teodolite, non tutti prevedibili (tipo e qualità delle mire, accuratezza del centramento, rifrazione laterale ...).



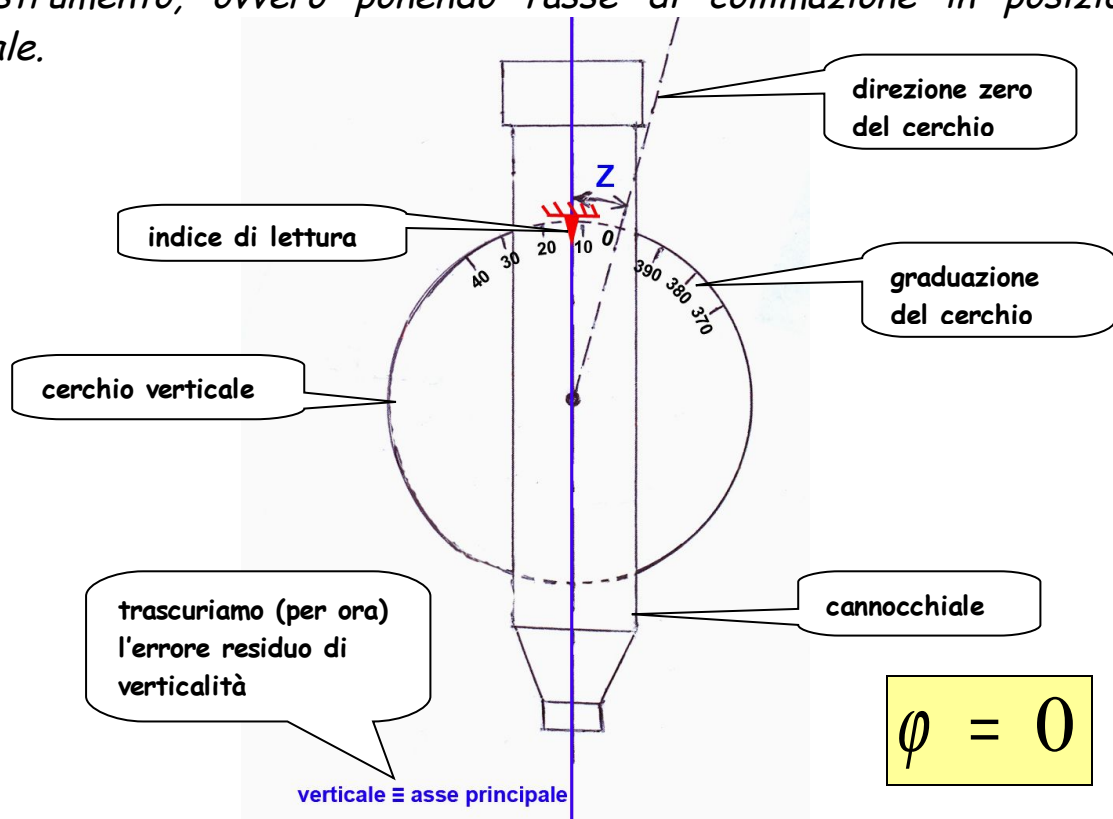
## 1.5. MISURA DEGLI ANGOLI ZENITALI

Con il teodolite in stazione nel punto  $S$ , in posizione cerchio a sinistra, si collima il punto da osservare (chiamiamolo  $A$ ) e si legge il cerchio zenitale. La lettura  $l_s$  al cerchio verticale (con lo strumento in posizione C.S.) è pari, *in prima approssimazione*, all'angolo zenitale  $\varphi_{SA}$ .

Se la stessa operazione viene eseguita con lo strumento in posizione cerchio a destra, l'angolo zenitale  $\varphi_{SA}$  è dato, sempre *in prima approssimazione*, da  $(400^\circ - l_d)$ , cioè dal complemento all'angolo giro (angolo esplementare) della lettura cerchio a destra  $l_d$ .

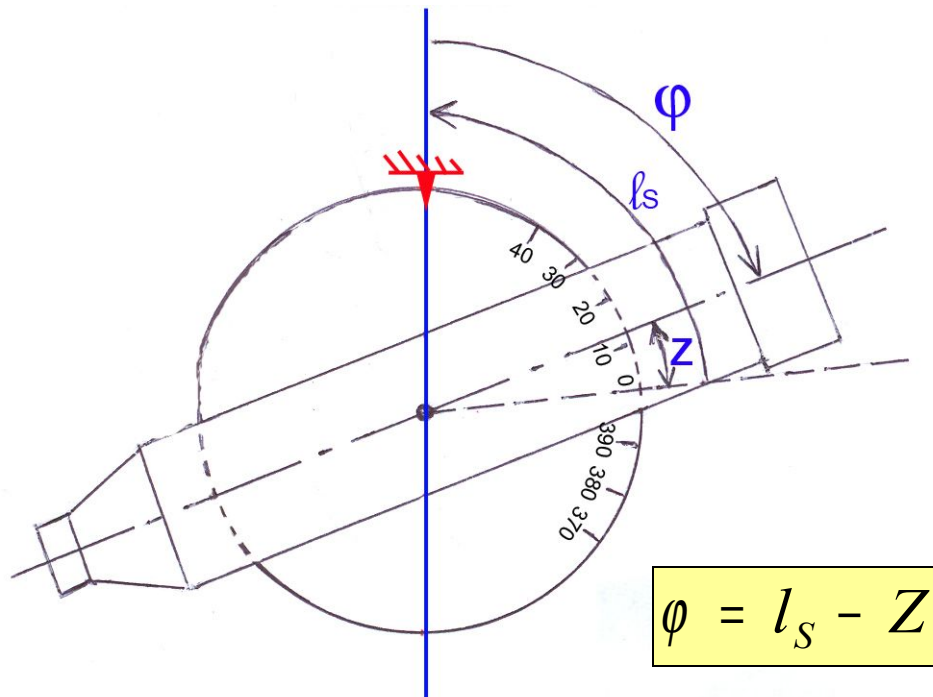
Alcuni tecnici eseguono la misura dell'angolo zenitale come sopra, ma commettono in questo modo un *errore sistematico* la cui entità molto spesso non è trascurabile. Per effettuare la misura in modo corretto, è necessario mettere in conto una costante dello strumento detta **zenit strumentale**, definita come segue :

Si dice **zenit strumentale  $Z$**  di un teodolite la lettura che si effettuerebbe\* al cerchio verticale collimando lo zenit sopra il centro dello strumento, ovvero ponendo l'asse di collimazione in posizione verticale.

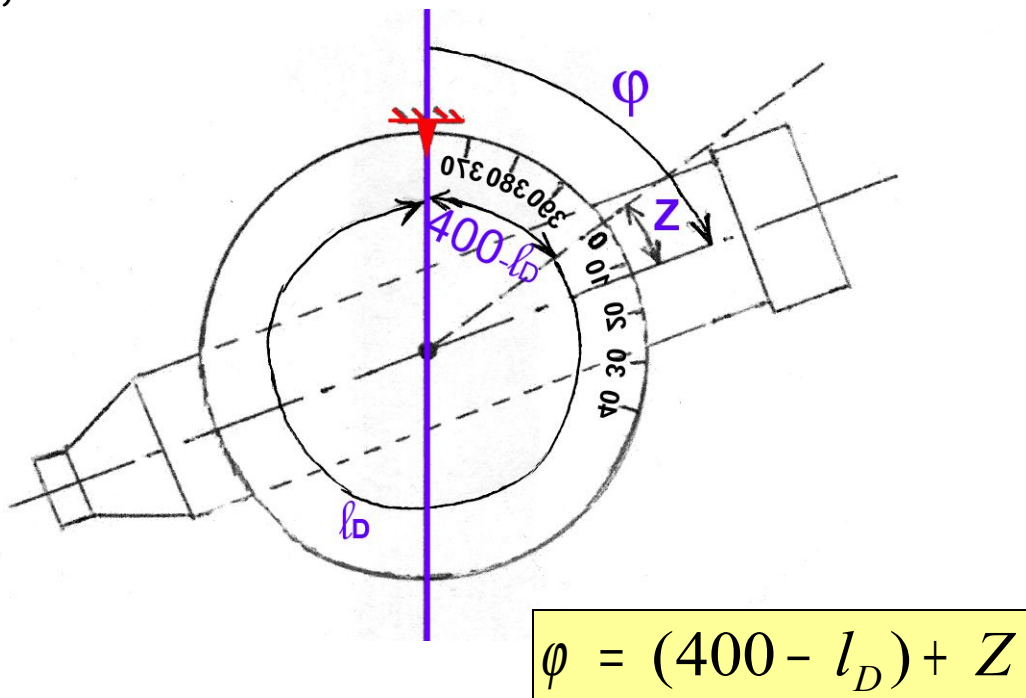


\* il condizionale è necessario perché non è possibile collimare lo zenit; lo zenit strumentale si può invece determinare da due letture coniugate a un punto qualsiasi, come vedremo tra poco.

Vediamo cosa avviene quando si collima un generico punto con lo strumento nella **posizione C.S.** :



Ora capovolgiamo il cannocchiale, ruotiamo l'alidada di 180° e ricollimiamo lo stesso punto nella **posizione C.D.** . Ecco la situazione che si presenta (notare la graduazione invertita - il cerchio è visto dall'altro lato, la figura è ribaltata rispetto alla precedente):



Le due relazioni scritte alla pagina precedente, messe insieme, costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite Z e  $\varphi$ . Eliminando  $\varphi$  si ottiene lo zenit strumentale Z:

dalla prima si ottiene  $\varphi = l_S - Z$

dalla seconda si ottiene  $\varphi = (400 - l_D) + Z$

per cui confrontando si ha  $l_S - Z = 400 - l_D + Z$

da cui si ricava lo zenit strumentale :

$$Z = \frac{l_S - (400 - l_D)}{2}$$

Lo *zenit strumentale* si ottiene dalla semidifferenza tra la lettura cerchio a sinistra e il complemento all'angolo giro della lettura cerchio a destra. Può risultare positivo o negativo. Nelle figure qui allegate è positivo.

Eliminando Z si ottiene l'angolo zenitale  $\varphi$ :

dalla prima si ottiene  $Z = l_S - \varphi$

dalla seconda si ottiene  $Z = \varphi - (400 - l_D)$

per cui confrontando si ha  $l_S - \varphi = \varphi - (400 - l_D)$

da cui si ricava l'angolo zenitale :

$$\varphi = \frac{l_S + (400 - l_D)}{2}$$

L'*angolo zenitale* si calcola facendo la media della lettura cerchio a sinistra e del complemento all'angolo giro della lettura cerchio a destra. Il valore così calcolato è esente dallo zenit strumentale.

**Esempio numerico:**

$$l^{C.S.} = 98,2340^g$$

$$l^{C.D.} = 301,7680^g$$

$$Z = \frac{l^{C.S.} - (400^g - l^{C.D.})}{2} = \frac{98,2340^g - (400^g - 301,7680^g)}{2} = \frac{98,2340^g - 98,2320^g}{2} = 0,0010^g$$

$$\varphi = \frac{l^{C.S.} + (400^g - l^{C.D.})}{2} = \frac{98,2340^g + (400^g - 301,7680^g)}{2} = \frac{98,2340^g + 98,2320^g}{2} = 98,2330^g$$

per verifica  $\varphi = l^{C.S.} - Z = 98,2340 - 0,0010 = 98,2330$

attenzione a non confondere queste formule con la "regola di Bessel" che, pur presentando alcune analogie, riguarda solo gli angoli azimutali

Nella pratica, in tutte le misure di una certa importanza l'angolo zenitale si misura sempre effettuando le **due letture coniugate** e facendone poi la media con la formula sopra riportata.

Si consiglia di calcolare anche, per ogni coppia di letture, lo zenit strumentale. Si è visto infatti che esso per definizione è una **costante** strumentale, per cui deve mantenersi pressoché **costante** (con una tolleranza che dipende dalla precisione del teodolite) per tutta la sessione di misura. Variazioni brusche del valore di Z indicano un probabile errore di collimazione o di lettura.

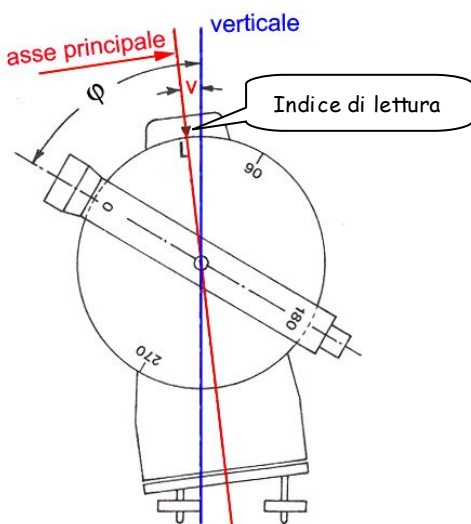
Nel rilievo di dettaglio "celerimetrico" si esegue di norma la sola lettura diritta. Conviene allora determinare all'inizio della stazione lo zenit strumentale effettuando qualche lettura doppia (diritta e capovolta), e poi correggere tutti gli angoli zenitali misurati solo in posizione diritta, con la formula  $\varphi = \ell s - Z$ .

Lo zenit strumentale come già si è detto può risultare positivo o negativo. Il suo valore è in genere abbastanza piccolo (ad es. qualche secondo o qualche decina di secondi) anche se non trascurabile. Esso può anche essere azzerato, o comunque reso molto piccolo, mediante una opportuna rettifica della livella zenitale o dell'indice zenitale automatico o sistema di compensazione (v. seguito).

### EFFETTO DELL'ERRORE RESIDUO DI VERTICALITÀ E SUA CORREZIONE

L'errore residuo di verticalità  $v$  (imperfetta verticalità dell'asse principale del teodolite), già trattato a proposito degli angoli azimutali, produce un errore sistematico  $\varepsilon_v$  anche sugli angoli zenitali.

Tale errore ha un massimo pari a  $v$  quando la misura è effettuata nel piano definito dalla verticale e dall'asse principale (v. figura qui sotto), mentre si azzerava nel piano perpendicolare. In prima approssimazione, per la legge di variazione dell'errore si può assumere la seguente espressione:



$$\varepsilon_v(\text{zenitale}) = v \cdot \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo azimutale tra il piano in cui giace l'errore residuo  $v$  (piano comprendente verticale ed asse principale) e il piano in cui si effettua la misura (comprendente asse principale e asse di collimazione)

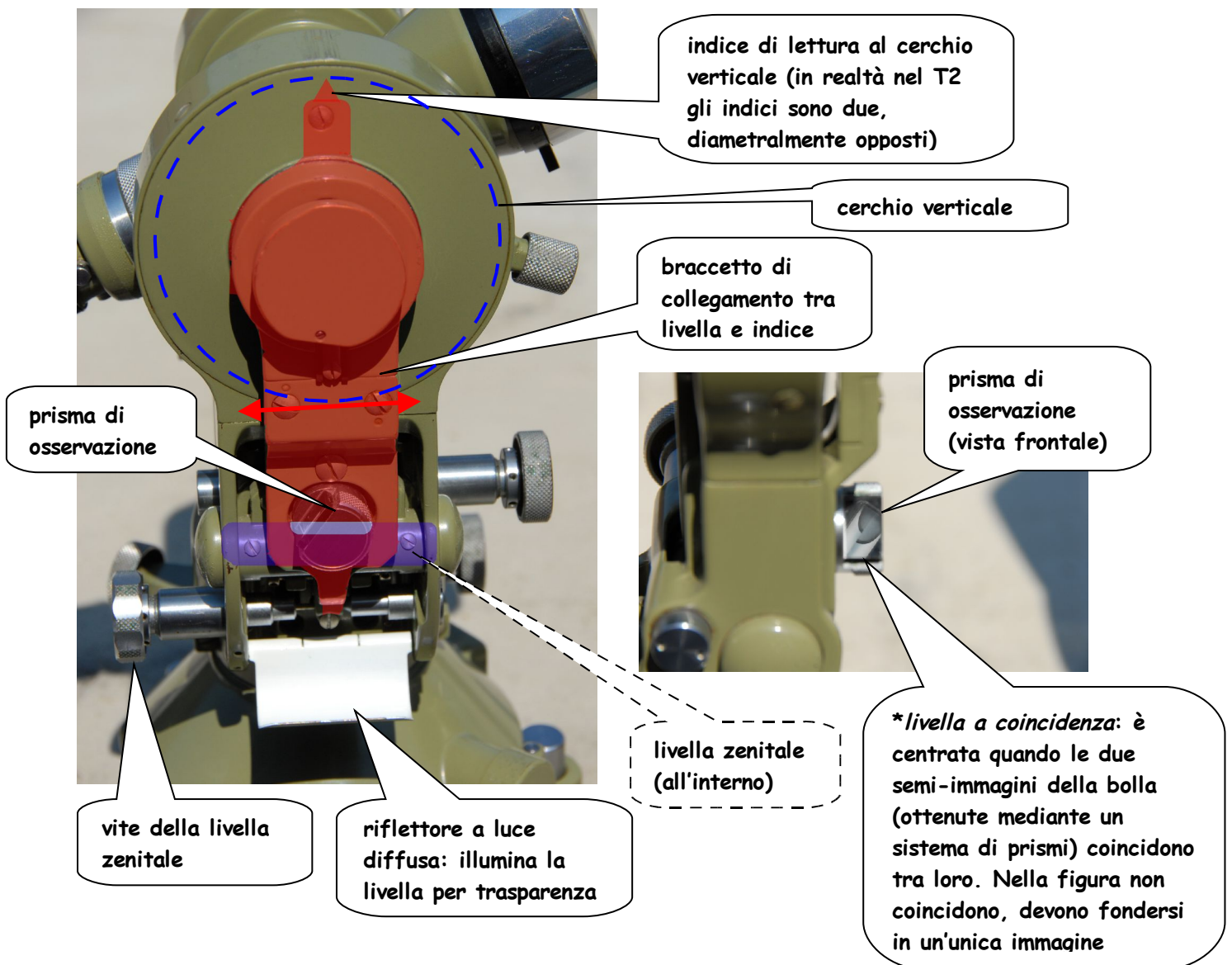
N.B. Non si confonda questo errore con lo zenit strumentale, che è tutta un'altra cosa (nelle figure precedenti l'errore di verticalità è stato considerato nullo)

Per la correzione dell'errore sistematico dovuto al residuo di verticalità esistono 4 tipi di dispositivi:

- livella zenitale
- indice zenitale automatico
- compensatore monoassiale
- compensatore biassiale

### Livella zenitale

E' una livella torica di alta sensibilità (di solito del tipo *a coincidenza di immagini\**) situata su un lato dell'alidada e collegata all'indice di lettura del cerchio verticale. Centrandola, si dispone l'indice in una posizione che rimane sempre costante, indipendentemente dall'inclinazione dell'asse principale. Questa livella deve essere centrata (manualmente) prima di eseguire ciascuna lettura al cerchio verticale.

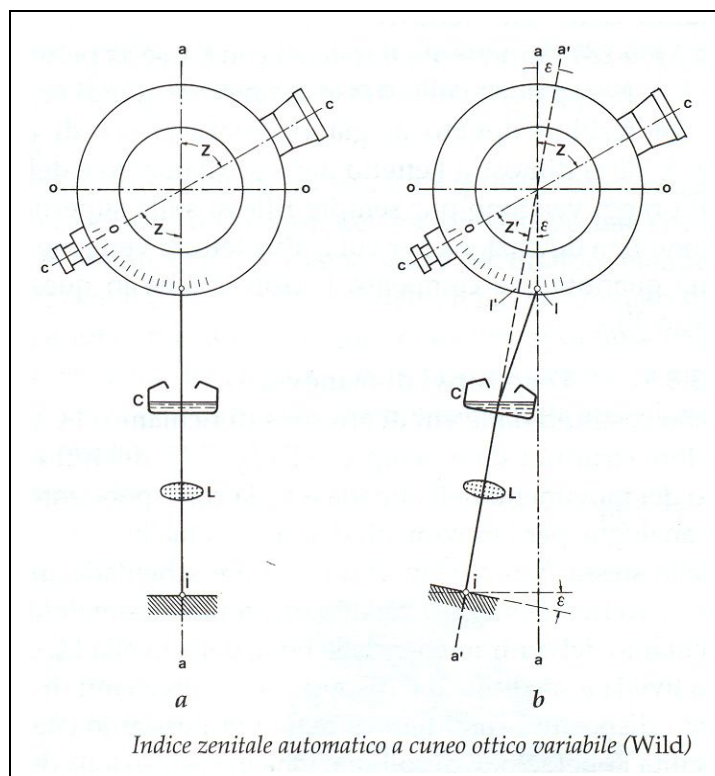


## Indice zenitale automatico

È un dispositivo ottico-meccanico a funzionamento automatico che sostituisce la livella zenitale (che va centrata manualmente prima di ogni lettura).

È basato sulla presenza di un elemento ottico mobile sensibile alla forza di gravità (ad es. un prisma a sospensione pendolare, o un prisma liquido), grazie al quale piccole inclinazioni dell'asse principale rispetto alla verticale non determinano variazioni nella lettura al cerchio verticale.

Esistono diversi tipi di indice zenitale automatico, ideati dai vari costruttori di strumenti. A titolo di esempio, si rappresenta nella figura sottostante lo schema del dispositivo adottato nei teodoliti ottico-meccanici Wild:

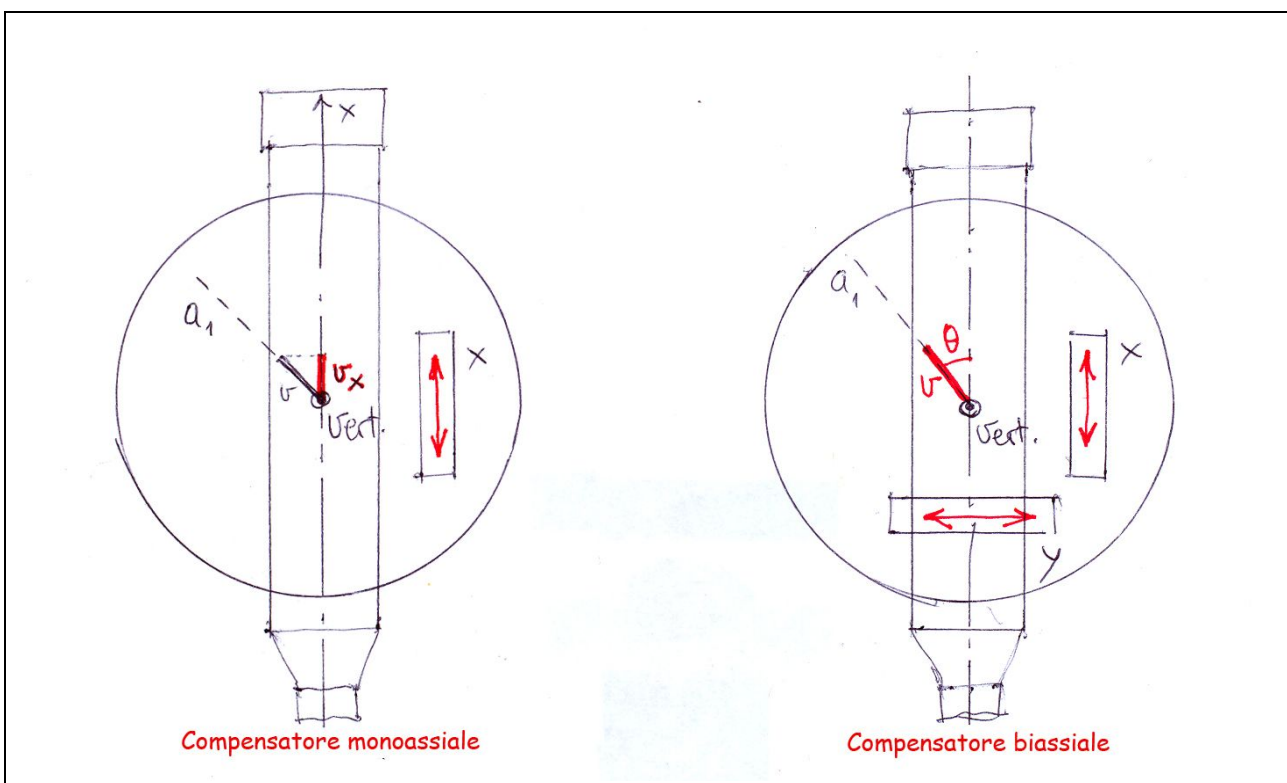


Nel percorso ottico del microscopio di lettura (di cui **L** rappresenta l'obiettivo) è inserito un prisma a sezione variabile (**C**) costituito da un liquido posto in un'ampolla di vetro, che varia forma in funzione dell'inclinazione dello strumento, in modo che la lettura rimanga sempre la stessa. Nella figura a sinistra (**a**) l'asse principale è verticale e il prisma non devia la luce perché le sue facce inferiore e superiore sono parallele. Nella figura a destra (**b**) l'asse principale è inclinato di  $\epsilon$  rispetto alla verticale, ma la variazione di forma del prisma, le cui facce superiore e inferiore formano ora un cuneo ottico, fa sì che l'indice **i** sul reticolo legga sempre la lettura corretta **l** anziché quella errata **l'**.

Questo tipo di dispositivi hanno un range di funzionamento limitato a piccole inclinazioni; se l'inclinazione è forte non riescono a correggere l'errore. Si riconosce la presenza di un indice zenitale automatico in uno strumento dando un piccolo colpo all'alidada mentre si legge il microscopio: se c'è l'indice automatico, si vedrà l'immagine oscillare per un breve periodo e poi fermarsi.

## Compensatore monoassiale e compensatore biassiale

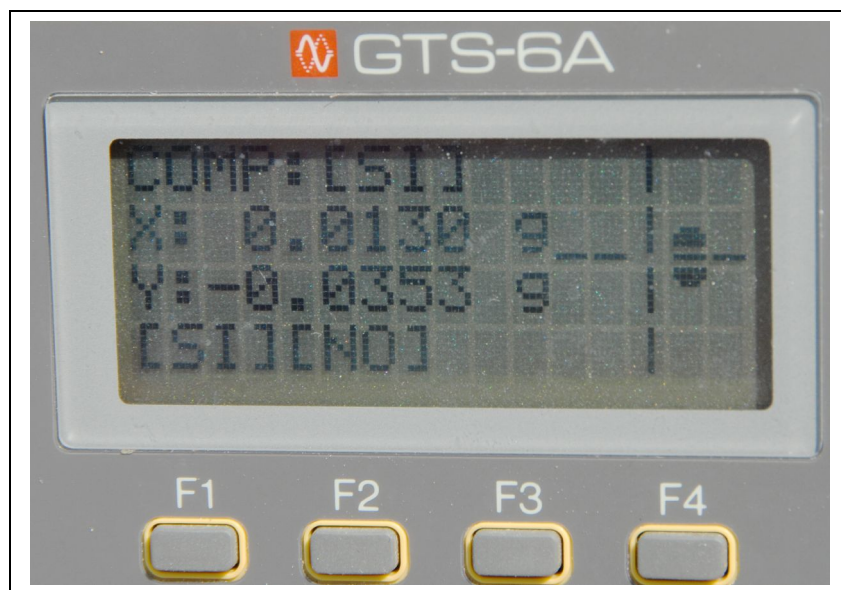
Sono sistemi di correzione automatica dell'errore di verticalità concettualmente analoghi all'indice zenitale automatico, ma basati su componenti ottico-elettronici e software piuttosto che su sistemi ottico-meccanici come il precedente. Essenzialmente sono costituiti da uno o più **sensori** elettromagnetici o elettro-ottici contenenti una parte mobile o spesso un liquido, che rilevano l'inclinazione (errore residuo di verticalità) dell'asse principale. I sensori utilizzati sono analoghi a quelli degli *inclinometri elettronici* di maggior precisione. La correzione angolare corrispondente all'inclinazione misurata viene calcolata con formule già viste in questo corso (effetto del residuo di verticalità) o ad esse analoghe, e applicata via software, in modo che il valore angolare visualizzato nel display (e memorizzato) sia corretto.



Il **compensatore monoassiale** è costituito da **un solo sensore** disposto parallelamente al piano in cui si muove il cannocchiale. Il sensore rileva la componente dell'inclinazione dell'asse principale proiettata su questo piano ( $v_x$ ). Il software calcola la correzione da dare **alla sola lettura zenitale** per tale inclinazione e la applica al valore sul display.

Il **compensatore biassiale** è costituito da **una coppia di sensori**, uno disposto parallelamente al piano in cui si muove il cannocchiale, e il secondo perpendicolare ad esso (oppure, in alternativa, è presente un unico  **sensore multidirezionale**). L'insieme della rilevazione dei due sensori (o la rilevazione del sensore multidirezionale) permette di determinare l'inclinazione complessiva  $v$  dell'asse principale e la direzione azimutale  $\theta$  in cui si trova il piano asse principale - verticale. Il software calcola la correzione da dare **a entrambe le letture angolari (azimutale e zenitale)** e la applica ai valori visualizzati.

Negli strumenti dotati di compensatore biassiale la tradizionale livella torica è a volte affiancata (ma quasi mai sostituita) da una *livella virtuale* (v. figura) che appare sul display.



Il compensatore biassiale è più complesso e costoso di quello monoassiale ma è anche più utile in quanto corregge l'effetto della non verticalità dell'asse anche sulle letture azimutali, cosa molto importante (come già detto) quando si lavora con *visuali inclinate*.

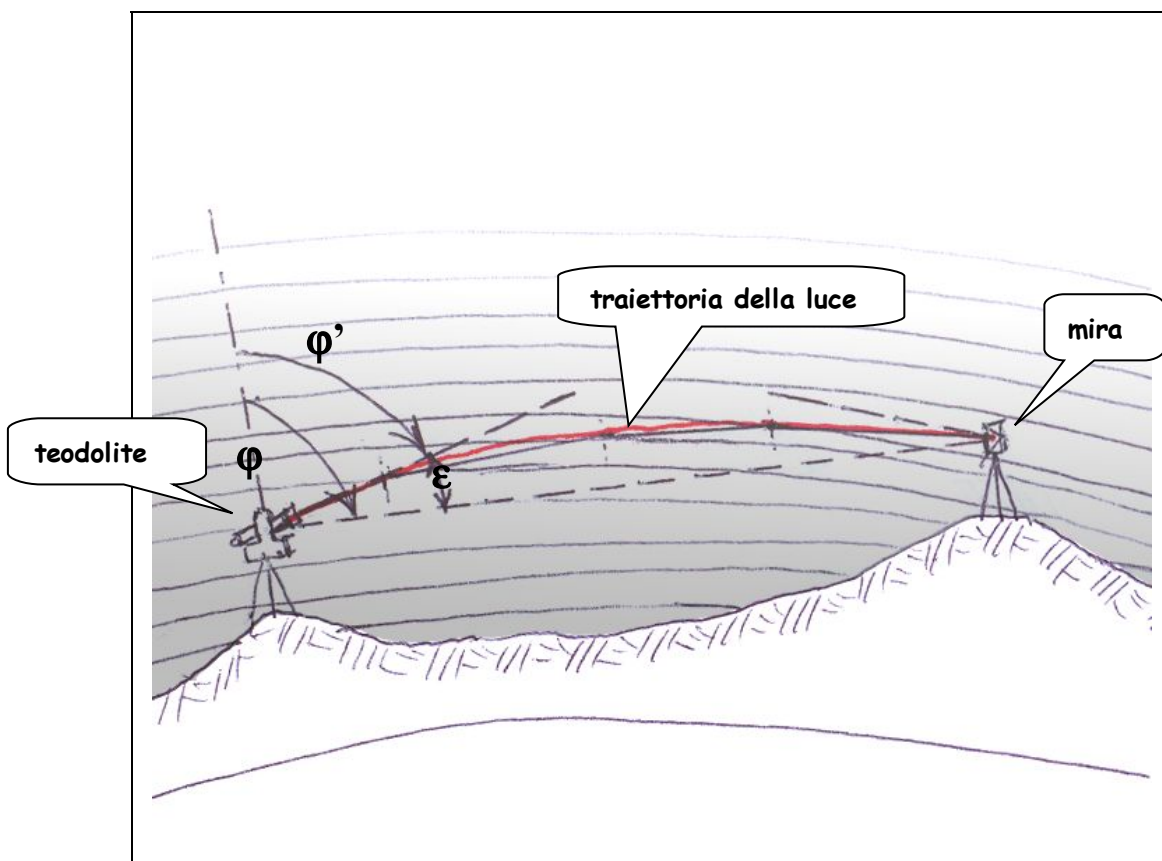
Il compensatore monoassiale ha un'efficacia limitata ai soli angoli zenitali, quindi in pratica equivale come effetto ai sistemi precedenti (livella zenitale e indice zenitale automatico) e non dà nulla in più, ma è più semplice costruttivamente per cui viene spesso montato nei teodoliti moderni.

### EFFETTO DELLA RIFRAZIONE ATMOSFERICA

Ai fini della misura degli angoli verticali si deve tener conto della componente della rifrazione sul piano verticale, detta **rifrazione verticale**, che va distinta dalla componente orizzontale o *rifrazione laterale* di cui si è già parlato a proposito di misura di angoli azimutali.

La **rifrazione verticale**, più forte di quella laterale, è dovuta alla *stratificazione dell'atmosfera*: per effetto della gravità terrestre, l'atmosfera è più densa a contatto con il suolo e va rarefacendosi salendo di quota. Alla variazione di densità corrisponde una variazione di indice di rifrazione, che è massimo presso il suolo e va diminuendo con la quota.

Questa variazione dell'indice di rifrazione provoca un *incurvamento* del percorso della luce dall'oggetto osservato al teodolite (v. figura a pagina seguente): nell'atmosfera **la luce non viaggia in linea retta** ma con una traiettoria curva che tende a seguire la curvatura della superficie terrestre.



La luce, nel passare da uno strato più denso a uno meno denso subisce una rifrazione, e devia *allontanandosi dalla normale* alla superficie di separazione tra i due strati. La variazione di densità in realtà non avviene per strati ma con continuità, per cui la traiettoria luminosa è una *curva con concavità verso il basso* (rappresentata con linea rossa nella figura). Il fenomeno è noto ai naviganti: in mare è possibile vedere navi molto lontane, anche oltre quella che sarebbe la teorica linea di orizzonte, proprio perché la traiettoria della luce tende a seguire per rifrazione la curvatura della terra.

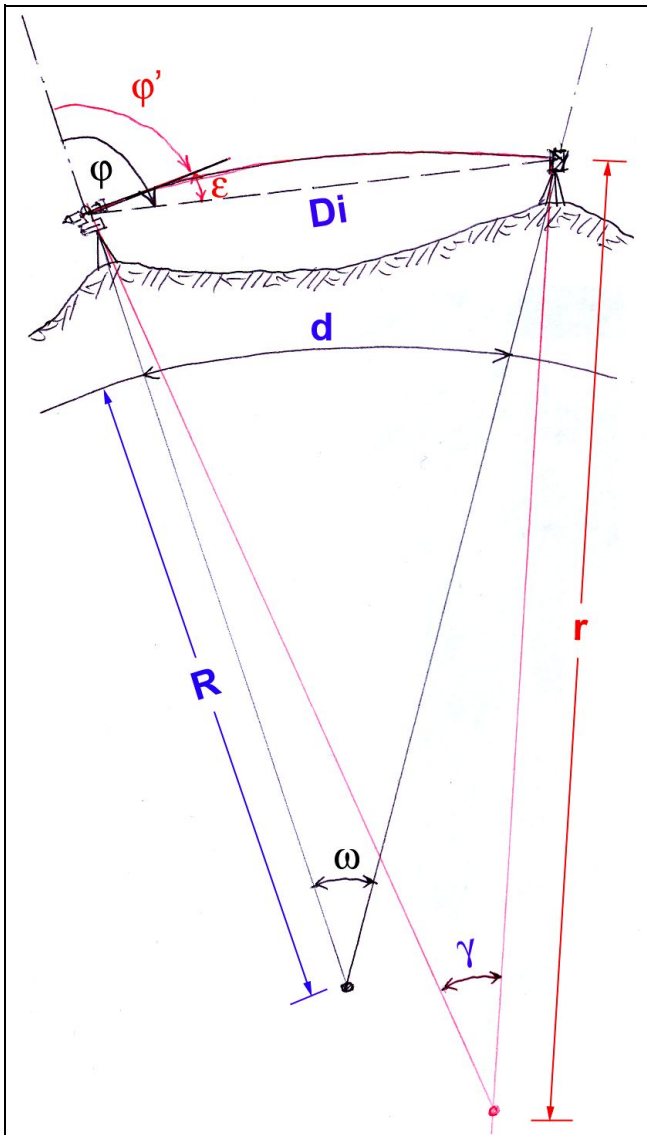
Ne consegue che, anziché misurare l'angolo zenitale  $\varphi$ , si misura un valore  $\varphi'$  che differisce da  $\varphi$  di una quantità incognita  $\varepsilon$ . Si tratta di un errore sistematico, in quanto  $\varphi'$  è sempre minore di  $\varphi$  (la concavità della traiettoria è sempre rivolta verso il basso). La correzione  $\varepsilon$  varia però a seconda delle condizioni dell'atmosfera, ed è necessario ricorrere a un opportuno **modello** che ci permetta di stimarla.

Il modello comunemente adottato per la rifrazione verticale, con buoni risultati, è il seguente: si assume che la traiettoria della luce sia prossima ad un arco di circonferenza di raggio  $r$ .

Il raggio della traiettoria viene stimato con la seguente espressione:

$$r = \frac{R}{k}$$

dove  $R$  è il raggio di curvatura medio della superficie terrestre nella zona (si assume pari al raggio della sfera locale), e  $k$  è detto **coefficiente di rifrazione atmosferica**



Il coefficiente di rifrazione atmosferica (da non confondere con l'indice di rifrazione che è un'altra cosa) risulta quindi definito come rapporto tra il raggio di curvatura della superficie di riferimento e quello della traiettoria luminosa:

$$k = \frac{R}{r}$$

I valori di  $k$  vengono determinati sperimentalmente (vedi seguito).

L'angolo al centro che sottende la traiettoria è:

$$\gamma \cong \frac{D_i}{r} \cong \frac{d}{r}$$

e quindi per come è stato definito  $k$  si ha:

$$\gamma \cong \frac{kd}{R}$$

L'angolo  $\varepsilon$  tra la corda e la tangente è un caso particolare di angolo alla circonferenza (con il vertice coincidente con uno degli estremi dell'arco sotteso) e quindi, per un noto teorema di geometria, è pari alla metà dell'angolo al centro che sottende lo stesso arco:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$$

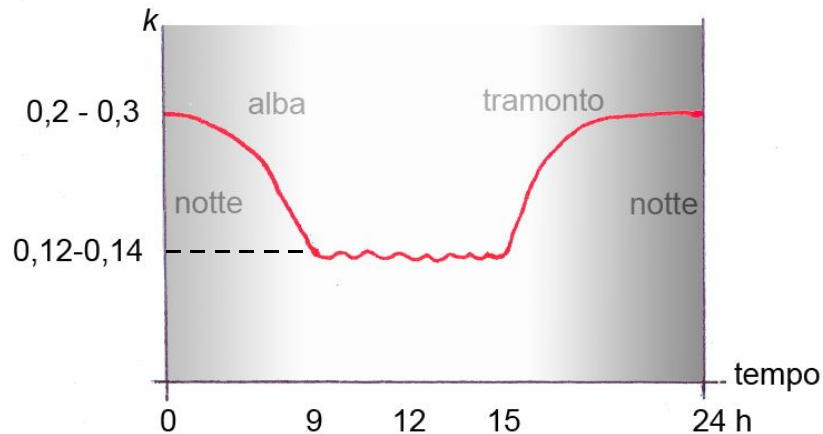
$$\varepsilon = \frac{kd}{2R}$$

Risulta pertanto: formula con cui si può calcolare la correzione da dare all'angolo zenitale per tener conto dell'effetto della rifrazione atmosferica.

## Determinazione del coefficiente di rifrazione atmosferica

Il coefficiente  $k$  viene determinato sperimentalmente. Uno dei metodi possibili è quello di effettuare misure di livellazione trigonometrica (v. seguito) tra punti di cui sia nota la quota, considerando  $k$  come incognita nella formula della livellazione trigonometrica.

Le esperienze mostrano che  $k$  varia notevolmente nel corso della giornata e del ciclo giorno-notte, con un andamento riportato qualitativamente nella seguente figura:



Nelle ore centrali della giornata  $k$  si mantiene abbastanza stabile (con piccole oscillazioni). Le esperienze eseguite in Italia indicano per tali orari un valore di  $k$  compreso tra 0,12 e 0,14. E' consigliabile eseguire misure di angoli zenitali nelle ore a cavallo del mezzogiorno, evitando invece i periodi dell'alba e del tramonto, in cui la variazione di  $k$  è molto rapida.

## ACCURATEZZA NELLA MISURA DEGLI ANGOLI ZENITALI

Nella misura degli angoli zenitali è possibile commettere **errori** di vario tipo, che possono essere distinti come segue:

### **ERRORI GROSSOLANI**

- errata individuazione zenitale del punto da collimare (es. base mira piuttosto che asse o sommità mira)
- mancato centramento della livella zenitale per dimenticanza dell'operatore (teodoliti con livella zenitale)
- errori di lettura e di trascrizione dei valori letti (teodoliti ottico-meccanici)
- errori nella numerazione dei punti, cancellazione di files (teodoliti elettronici)
- spostamenti indesiderati dello strumento durante l'esecuzione della stazione

### **ERRORI SISTEMATICI**

- zenit strumentale (se non se ne tiene conto)
- effetto dell'errore di verticalità (eliminato quasi completamente dai dispositivi visti, che però devono essere ben tarati)

- effetto di condizioni di costruzione non perfettamente rispettate
- effetto della rifrazione atmosferica verticale: il modello basato sul coefficiente  $k$  è semplificativo, e il valore assunto per  $k$  è approssimato, spesso può discostarsi dai valori 0,12-0,14 comunemente assunti. *La rifrazione atmosferica è la maggior causa di errore nella misura degli angoli zenitali.*

#### ERRORI ACCIDENTALI

- errori di collimazione della mira: la collimazione non è mai "perfetta" ma dipende dalle capacità visive e dall'apprezzamento dell'operatore. I teodoliti robotizzati hanno una telecamera interna che collima alcuni tipi di mire standard (ad es. un prisma) automaticamente, con ripetibilità migliore rispetto a un operatore umano.
- errori di stima della coincidenza del micrometro (teodoliti ottico-meccanici).
- piccoli movimenti del treppiede o del teodolite durante la misura, dovuti ad es. ad effetti termici (è bene proteggere lo strumento dall'insolazione diretta in estate usando un ombrellone) o ad assestamenti delle zampe del treppiede nel terreno (es. su terreno naturale poco compatto o su asfalto caldo).

Per effetto di questi errori, e in particolare di quello provocato dalla rifrazione atmosferica, l'accuratezza raggiungibile in pratica nella misura di un angolo zenitale è sempre **inferiore a quella vista per gli angoli azimutali**. L'errore dovuto alla rifrazione atmosferica è tanto più grande quanto maggiore è la distanza, per cui si può concludere in linea di massima quanto segue:

- su distanze brevi (fino a qualche centinaio di metri) l'accuratezza degli angoli zenitali è abbastanza simile a quella degli angoli azimutali;
- a partire da 1-2 km in su, l'indeterminazione è superiore a quella degli angoli azimutali, di un fattore da 1,5-2 in su (crescente con la distanza);
- oltre gli 8-10 km circa la misura, a causa della rifrazione, diviene talmente poco accurata da risultare inaffidabile: **si sconsiglia di eseguire misure di angoli zenitali su lunghe distanze.**

Nella quasi totalità dei teodoliti si può notare che il cerchio verticale ha un diametro inferiore al cerchio azimutale. Questo proprio perché gli angoli zenitali sono penalizzati dall'effetto della rifrazione e non possono raggiungere la stessa accuratezza di quelli azimutali.

Per lo stesso motivo, nella misura di angoli zenitali non si procede alla reiterazione con spostamenti dello zero del cerchio (il cerchio verticale è privo di dispositivo di reiterazione). E' comunque buona norma ripetere la misura più volte, possibilmente in orari diversi.